TD physique 21

Diffusion thermique

Exercice 1

On cherche dans cet exercice à rendre compte du fait que l'on perçoit, pour une même température, un objet en bois plus chaud qu'un objet métallique.

On modélise la situation de contact entre la main et l'objet par un contact entre deux matériaux parallélépipédiques, de longueur L et de section s. L'interface entre les deux matériaux est en x = 0 et les surfaces latérales sont isolées. Ainsi, la température des matériaux ne dépend que de x.

1. Etablir, à partir de la loi de Fourier, l'équation de diffusion de la chaleur.

2. On considère l'ensemble en régime stationnaire, les extrémités ($x = -L$ et $x = +L$) des matériaux étant maintenues aux températures T_1 et T_2. On note T_i la température au niveau de l'interface. Donner l'expression de T en fonction de x pour chaque matériau.

3. En considérant la puissance thermique qui traverse l'interface entre les deux matériaux, donner l'expression de T_i en fonction de T_1, T_2 et des conductivités thermiques des matériaux.

4. Application pour un contact main (37°C) - objet (20°C) pour du bois et du fer. Les conductivités thermiques de la main, du bois et du fer valent respectivement 10 ; 1 et 100 $W.m^{-1}.\mathrm{K}^{-1}$

Exercice 2

La diffusion de particules obéit à une loi analogue à la loi de Fourier (loi de Fick), la densité volumique de particules n_v jouant le rôle de la température, et le coefficient de diffusion D celui de le conductivité thermique.

On s'intéresse à l'évaporation de l'eau au dessus d'un lac. La vaporisation de l'eau du lac maintient une certaine densité volumique de molécules d'eau juste au dessus de la surface, puis ces particules diffusent dans l'air. On considère que la situation est stationnaire et que le gradient de densité de particules est uniquement vertical (On néglige les 'effets de bord"). La surface du lac est s = 2 hectares ; la température (uniforme) est T = 300 K. La pression partielle en vapeur d'eau vaut $\mathrm{p}_0 = 3,3\mathrm{kPa}$ à la surface et $\mathrm{p(L)} = 0,75\mathrm{p}_0$ à la hauteur L = 12 m.

1) En utilisant une démarche analogue à celle mise en œuvre pour établir l'équation de diffusion thermique, établir l'équation différentielle vérifiée par $\mathrm{n_v}$.

2) En déduire $\mathrm{n_v(z)}$.

3) Calculer la masse d'eau évaporée en 1 heure, le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air étant $\mathrm{D} = 22.10^{-6}\ \mathrm{m^2\ s^{-1}}$.

4) Par analogie avec la diffusion thermique, définir et calculer la résistance à la diffusion.

Exercice 3

Une pièce rectangulaire de $5,0\ \mathrm{m} \times 8,0\ \mathrm{m}$, dont les murs ont une hauteur de $2,5$ m et une épaisseur de $E = 0,3$ m, comprend une baie vitrée de $2,0\ \mathrm{m} \times 1,8$ m et deux fenêtres de $1,2\ \mathrm{m} \times 1,2$ m, toutes les trois d'épaisseur de vitres $e = 2,0$ mm.

L'intérieur de la pièce est à la température $T_1 = 19$°C, et les deux grands murs avec baie et fenêtres donnent sur l'extérieur à la température $T_2 = 0$°C. Il n'y a aucun échange thermique à travers les deux autres (petits) murs, le sol et le plafond, les appartements voisins étant à la même température T_1

Les conductivité thermiques du verre, d'un mur (béton+isolant) et de l'air sont $\lambda_v = 0,78\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}, \lambda_M = 0,10\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ et $\lambda_A = 0,026\ \mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.

1. Calculer les résistances thermiques R_v des vitres, R_M des murs concernés, puis R de l'ensemble. En déduire les flux thermiques Φ_v à travers les vitres, Φ_M à travers les murs concernés, et Φ_T à travers l'ensemble. Evaluer le rapport $\frac{\Phi_M}{\Phi_T}$.

Pour limites les pertes par les parties vitrées, les vitres simples sont remplacées par du "double vitrage" : deux vitres d'épaisseur $e = 2,0$ mm séparées par une couche d'air sans convection et d'épaisseur $e' = 4,0$ mm.

2. Calculer la résistance thermique d'une simple couche de vitre R_v, de la couche d'air comprise entre les deux couches de vitres R_A, puis du "double vitrage" dans son ensemble R_{DV}.

En déduire le flux thermique Φ_{DV} à travers le "double vitrage" et conclure. Que vaut alors le flux Φ'_T à travers l'ensemble murs + "double vitrage" ?

Exercice 4

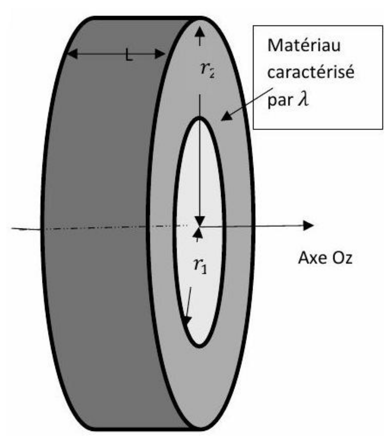
La loi phénoménologique de Fourier, relative à la diffusion thermique, traduit la proportionnalité entre la densité de flux thermique $\overrightarrow{J_d}$ et le gradient de température :

$$\overrightarrow{J_d} = -\lambda \overrightarrow{grad}(T).$$

1. Quels sont le nom et la dimension du coefficient λ ? En déduire son unité SI. Justifier physiquement le sens du vecteur densité de flux thermique $\overrightarrow{Jd}$.

On se place en coordonnées cylindriques pour étudier une situation physique stationnaire, unidimensionnelle à symétrie cylindrique, telle que la température en un point M (r, θ, z) ne dépend que de r.

Le gradient de la température $T(r)$ est égal à $\overrightarrow{grad}(T) = \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)\overrightarrow{e_r}$.



On considère un cylindre conducteur thermique creux de longueur L, occupant l'espace $r_1 < r < r_2$ constitué d'un matériau de conductivité λ dans lequel il n'y a aucune source thermique dans le matériau.

2. Quand on effectue un bilan énergétique pour le matériau compris entre les cylindres de rayons r et $r + dr$, on obtient l'équation différentielle vérifiée par le flux thermique :

$$\frac{d\left(r.j_d(r)\right)}{dr} = 0.$$

En déduire la loi $T(r)$ en notant T_1 et T_2 les températures des rayons r_1 et r_2 :

$$T_1 = T\left(r = r_1\right) et T_2 = T\left(r = r_2\right).$$

3. Exprimer la puissance thermique φ qui traverse le cylindre de rayon r et de longueur L, dans le sens des r croissants.

4. En déduire que la résistance thermique du cylindre s'exprime par $R = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

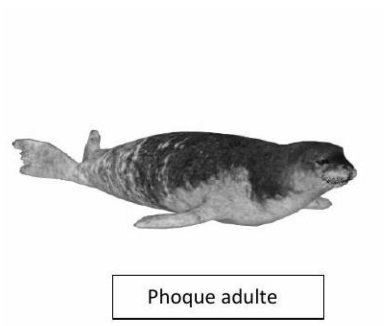
5. Prenons l'exemple d'un phoque marin de taille moyenne de masse M = 150 kg, vivant dans un océan à la température $\theta_0 = 2°$C. On le modélise (figure 3) par un cylindre de longueur L = 1,6 m, de rayon r = 25 cm, qui ne perd de l'énergie que par sa surface latérale, considérée comme " partiellement isolée " de l'eau froide par une épaisseur e = 50 mm de graisse de coefficient caractéristique $\lambda = 7,0 \cdot 10^{-2}$ SI. Sa température d'existence est égale à $\theta_{eq} = 36,5°$C supposée uniforme. Il pêche 4,0 kg de poisson pour sa consommation journalière. Cette nourriture lui fournit une énergie de 4600 kJ par kg de poisson consommé.

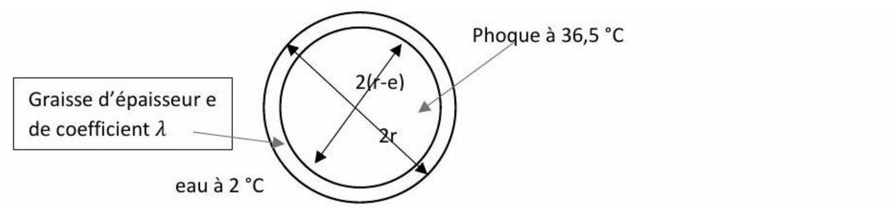
Évaluer l'énergie thermique perdue par le phoque en une journée et la comparer à l'énergie apportée par sa nourriture.

6. Un bébé phoque a ses dimensions divisées par 2,5 par rapport au phoque adulte, y compris l'épaisseur e' de graisse. Justifier pourquoi sa masse vaut m = 9,6 kg.

Ses besoins métaboliques nécessitent une consommation de $5,0 \cdot 10^{-1}$ kg de poisson par jour. Son corps est entouré d'un duvet d'épaisseur e'' = 10 mm et de coefficient $\lambda'' = 1,0 \cdot 10^{-2}$ SI.

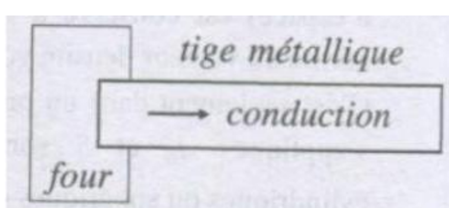
Évaluer la consommation de poisson journalière nécessaire à ce bébé phoque. Combien aurait il dû consommer en plus par jour s'il n'avait pas eu de duvet protecteur ?





Exercice 5

Une tige cylindrique de longueur L (à conduction axiale et calorifugée sur la paroi latérale) est initialement à la température uniforme T_2 (celle de l'air environnant) et à $t = 0$, on lui applique une température T_1 en $x = 0$ (extrémité encastrée dans un four, voir le schéma, alors qu'elle demeure à T_2 en $x = L$; il s'instaure alors un régime transitoire.



Estimer la durée τ d'établissement du régime permanent pour une tige d'acier pour laquelle $\lambda = 82$ W.m^{-1}.K^{-1} $c = 0,46.10^3$ J.kg^{-1}.K^{-1} et $\rho = 7,8.10^3$ kg.m^{-3} pour des longueurs $L = 25$ cm et $L = 50$ cm.

Exercice 6

On considère le sous sol comme un milieu semi-infini homogène de conductivité thermique λ, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c. On donne $a = \lambda/\rho c = 6.10^{-7}$ SI. On suppose que la température à la surface du sol est soumise à des variations de température de la forme $T_s(t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$.

1) Donner la dimension du coefficient a introduit ci-dessus

2) Déterminer la température $\mathrm{T(x,t)}$ en un point de profondeur x en utilisant la notation complexe :

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + \underline{f}(x)\exp(i\omega t)$$

3) Déterminer la vitesse de propagation de cette onde thermique

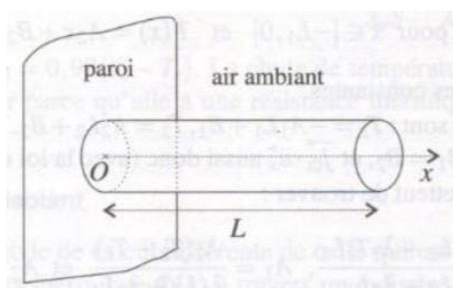
4) On considère des variations journalières de température, entre 0°C et 16°C. Calculer la vitesse de propagation. A partir de quelle profondeur les variations sont-elles inférieures à 1°C ?

5) On considère des variations annuelles de température, entre -10°C et 26°C. Calculer la vitesse de propagation. A partir de quelle profondeur les variations sont-elles inférieures à 1°C ?

Exercice 7

Une ailette de refroidissement, constituée par un cylindre d'axe (Ox), rayon r et longueur L, est fixée par sa base $x = 0$ sur une paroi dont la température est T_1. La paroi et l'ailette sont en contact avec l'air ambiant de température T_e, avec lequel ils ont des échanges thermiques régis par la loi de Newton avec un coefficient de transfert surfacique h. On souhaite calculer le flux thermique passant de la paroi à l'air ambiant par l'intermédiaire de l'ailette. On se place en régime stationnaire et on fait l'hypothèse que la température dans l'ailette ne dépend que de x.

On prendra les valeurs numériques suivantes : $r = 1$ mm, $L = 10$ cm, $\lambda = 400$ W·m^{-1}·K^{-1}, $h = 150$ W·m^{-2}·K^{-1}, $T_1 = 400K$ et $T_e = 300K$.



1. En appliquant le premier principe à la portion d'ailette comprise entre x et $x+dx$ montrer que la température T de l'ailette vérifie l'équation suivante :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{2h}{r\lambda}\left(T(x) - T_e\right)$$

2. Montrer que $T(x)$ peut se mettre sous la forme : $T(x) = A\exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B\exp\left(\frac{-x}{\delta}\right) + T_e$. Donner l'expression de δ et calculer sa valeur numérique.

3. Comment écrire la condition aux limites en $x = 0$ et $x = L$?

On admettra que ces conditions aux limites conduisent aux expressions suivantes, avec $\beta = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ et $\alpha = \frac{\lambda}{\delta h}$:

$$A = \frac{(T_1 - T_e)\,\beta\exp\left(-2\frac{L}{\delta}\right)}{1 + \beta\exp\left(-2\frac{L}{\delta}\right)} \qquad B = \frac{T_1 - T_e}{1 + \beta\exp\left(-2\frac{L}{\delta}\right)}$$

4. Calculer numériquement α, β, L/δ, A et B ainsi que la température $T(x = L)$ et vérifier la condition aux limites en $x = L$.

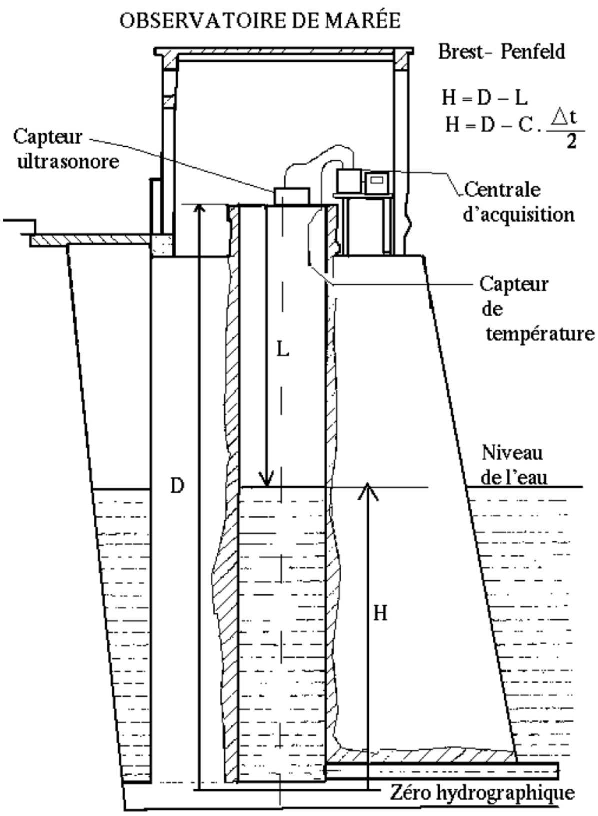
5. Expliquer pourquoi le flux thermique passant de la paroi à l'ailette est égal à celui qui passe de l'ailette à l'air, donner son expression et calculer sa valeur numérique.

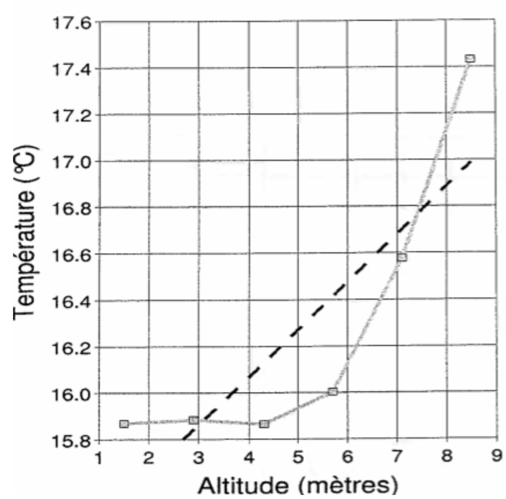
6. Que vaudrait le flux thermique échangé avec l'air en l'absence d'ailette (pour une même surface de paroi) ?

7. Définir et calculer numériquement l'efficacité de l'ailette (en termes d'énergie échangée avec l'air) et comparer avec la valeur de α.

Exercice 8

La surface de l'eau en mer ou sur les côtes n'étant pas plane la plupart de temps, il importe de mesurer les variations du niveau de la mer en s'affranchissant des fluctuations de hauteur. C'est le rôle du puits de tranquillité. A l'intérieur du bâtiment (voir schéma de la figure **??***), le puits de tranquillité est constitué d'un tube cylindrique vertical où l'eau rentre par le bas et peut monter librement. Les mesures de hauteur d'eau se font dans ce tube de diamètre 1,5 mètre pour le marégraphe de Brest. Même si le bâtiment est fermé, isolé du soleil et des intempéries, la hauteur du puits (plus de 8 mètres) fait que sa température interne n'est pas uniforme. Il faut donc envisager un gradient de température à l'intérieur du puits. On donne une vue en coupe du puits de tranquillité ainsi qu'un enregistrement de la température en fonction de l'altitude (les carrés correspondent aux points de mesure).*



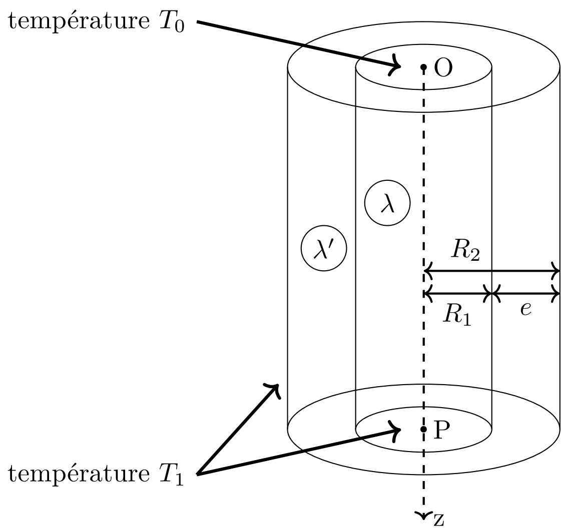


1. Comment peut-on qualifier l'effet du puits de tranquillité sur les variations de hauteur d'eau en termes de filtrage ?

2. Evaluer numériquement la norme du gradient de température en haut du puits (environ $8,5\ m$ d'altitude).

Pour rendre compte du gradient de température (dans l'air) qui s'établit dans le puits, on adopte le modèle suivant : Le puits est cylindrique, de rayon R_1 *(on note* $s = \pi {R_1}^2$ *sa section) et de hauteur* L *(entre le niveau de l'eau et le haut du puits). L'air contenu dans le puits est assimilé à un matériau de masse volumique invariable* μ*, de capacité thermique massique* c *et de conductivité thermique* λ *que l'on considère globalement au repos (on néglige ainsi la convection et la dilatation, ce qui revient à dire que, pour simplifier la modélisation, on raisonne comme si l'air était un solide indilatable). La température de l'air dans le puits ne dépend que de la profondeur* z*.*

L'eau impose en $z = L$ *(point* P*) une température* T_1 *tandis que la partie supérieure impose en* $z = 0$ *(point* O*) une température* T_0*. Les parois du puits, d'épaisseur* e *et de conductivité thermique* λ'*, sont comprises entre les rayons* R_1 *et* R_2 *(donc* $e = R_2 - R_1$*) et caractérisées par un coefficient* r_{th} *homogène à une résistance thermique multipliée par une longueur et défini par* $R_{th} = r_{th}/\ell$ *où* R_{th} *est la résistance thermique associée à une longueur* ℓ *de parois. L'extérieur des parois est à la température de l'eau,* T_1*.*



3. On cherche à écrire l'équation de diffusion thermique à une dimension vérifiée par la température à l'intérieur du puits. On considère des évolutions à pression constante. On introduira un terme p qui représente une puissance par unité de longueur (selon (Oz)) et qui traduit les échanges thermiques au travers des parois du puits (p devant être positive si de l'énergie est effectivement reçue par l'air à l'intérieur du puits). Montrer que l'équation de diffusion thermique se met sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \alpha\, p$$

Donner les expressions de D et α en fonction de μ, c, λ et s.

On se place en régime stationnaire. Dans un premier temps, on considère qu'il n'y a pas d'échanges thermiques au travers des parois.

4. Montrer que cette hypothèse implique un gradient de température uniforme.

On prend maintenant en compte les échanges thermiques au travers des parois (et on est toujours en régime stationnaire).

5. Etablir l'expression de r_{th}

6. En partant de l'équation obtenue à la question 3, compte tenu de l'hypothèse de régime stationnaire, montrer que la température T à l'intérieur du puits vérifie l'équation :

$$\frac{d^2T}{dz^2} - k^2T = -k^2T_1$$

Donner l'expression de k en fonction de λ, s et r_{th}.

7. Donner la forme des solutions de l'équation différentielle de la question 6 sans chercher à expliciter les constantes d'intégration. On admet ensuite que l'on doit se restreindre à une expression de la forme $T(z) = Ae^{-kz} + B$. Donner les expressions de A et B en fonction de T_1 et T_0.

8. Représenter graphiquement T en fonction de z. Est-ce qualitativement en accord avec les données expérimentales ?

9. En déduire l'expression du gradient de température dans le puits, commenter son sens et donner en particulier $\left\|\overrightarrow{grad}(T)\right\|(z=0)$.

10. On donne les valeurs numériques suivantes :

— $d = 1,5m$ (diamètre du puits)

— $\lambda = 0,023 W.m^{-1}.K^{-1}$ (conductivité thermique de l'air)

— $\lambda' = 1,5 W.m^{-1}.K^{-1}$ (conductivité thermique des parois)

— $e = 2m$ (épaisseur des parois)

Calculer numériquement r_{th}, k et $\left\|\overrightarrow{grad}(T)\right\|(z=0)$. Critiquer cette dernière valeur.