

Exercice 1

On cherche dans cet exercice à rendre compte du fait que l'on perçoit, pour une même température, un objet en bois plus chaud qu'un objet métallique.

On modélise la situation de contact entre la main et l'objet par un contact entre deux matériaux parallélépipédiques, de longueur L et de section s . L'interface entre les deux matériaux est en $x = 0$ et les surfaces latérales sont isolées. Ainsi, la température des matériaux ne dépend que de x .

1. Etablir, à partir de la loi de Fourier, l'équation de diffusion de la chaleur.
2. On considère l'ensemble en régime stationnaire, les extrémités ($x = -L$ et $x = +L$) des matériaux étant maintenues aux températures T_1 et T_2 . On note T_i la température au niveau de l'interface. Donner l'expression de T en fonction de x pour chaque matériau.
3. En considérant la puissance thermique qui traverse l'interface entre les deux matériaux, donner l'expression de T_i en fonction de T_1, T_2 et des conductivités thermiques des matériaux.
4. Application pour un contact main (37°C) - objet (20°C) pour du bois et du fer. Les conductivités thermiques de la main, du bois et du fer valent respectivement 10 ; 1 et 100 $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

1.



signe "-" car
Pth est le flux
entrant

1. pp pour le volume V de matériau de conductivité thermique λ
entre t et $t + dt$: $dU = dQ$

$$\partial_t, dQ = P_{th} dt \Rightarrow \frac{dU}{dt} = P_{th}$$

$$U = \iiint_V \rho c T \quad \text{donc} \quad \frac{dU}{dt} = \iiint_V \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

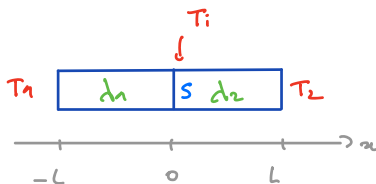
$$\text{Et } P_{th} = - \oint_S \vec{f}_T \cdot d\vec{S} = - \iiint_V \text{div}(\vec{f}_T) dV$$

green-estrogonski
En identifiant, on obtient $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \text{div}(\vec{f}_T)$

Enfin, $\vec{f}_T = -\lambda \text{grad}(T)$ donc $\text{div}(\vec{f}_T) = -\lambda \text{div}(\text{grad}(T))$
 $= -\lambda \Delta T$

Finalement, $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$, en 1D : $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

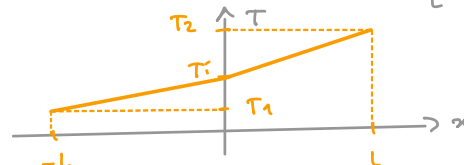
2.



Pour chaque matériau, en régime stationnaire,
 $\Delta T = 0 \Rightarrow T = ax + b$

Donc pour $-L \leq x \leq 0$: $T = T_i + \frac{T_i - T_1}{L} x$

pour $0 \leq x \leq L$: $T = T_i + \frac{T_2 - T_i}{L} x$



3. La continuité du flux thermique en $x=0$ donne :

$$f_{th1} S = f_{th2} S \Rightarrow \lambda_1 \frac{T_i - T_1}{L} S = \lambda_2 \frac{T_2 - T_i}{L} S \Rightarrow \lambda_1 (T_i - T_1) = \lambda_2 (T_2 - T_i)$$

et donc $T_i = \frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$

$\lambda_2 = 1 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (bois) : $T_i = 35,5^\circ\text{C}$

$\lambda_2 = 100 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ (fer) : $T_i = 21,5^\circ\text{C}$

4. A.N : $T_1 = 37^\circ\text{C}$; $T_2 = 20^\circ\text{C}$; $\lambda_1 = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

Exercice 2

La diffusion de particules obéit à une loi analogue à la loi de Fourier (loi de Fick), la densité volumique de particules n_v jouant le rôle de la température, et le coefficient de diffusion D celui de la conductivité thermique.

On s'intéresse à l'évaporation de l'eau au dessus d'un lac. La vaporisation de l'eau du lac maintient une certaine densité volumique de molécules d'eau juste au dessus de la surface, puis ces particules diffusent dans l'air. On considère que la situation est stationnaire et que le gradient de densité de particules est uniquement vertical (On néglige les 'effets de bord'). La surface du lac est $s = 2$ hectares; la température (uniforme) est $T = 300$ K. La pression partielle en vapeur d'eau vaut $p_0 = 3,3$ kPa à la surface et $p(L) = 0,75p_0$ à la hauteur $L = 12$ m.

1) En utilisant une démarche analogue à celle mise en œuvre pour établir l'équation de diffusion thermique, établir l'équation différentielle vérifiée par n_v .

2) En déduire $n_v(z)$.

3) Calculer la masse d'eau évaporée en 1 heure, le coefficient de diffusion de la vapeur d'eau dans l'air étant $D = 22 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

4) Par analogie avec la diffusion thermique, définir et calculer la résistance à la diffusion.

1.



Le nombre de particules N dans le volume V s'écrit :

$$N = \iiint_V n_v dV \quad \text{où } n_v \text{ est le nombre de particules par u. de volume.}$$

$$\frac{dN}{dt} = - \oint_S \vec{j}_n \cdot \vec{dS} \quad \text{avec } \frac{dN}{dt} : \text{nombre de particules entrant dans le volume } V \text{ (en traversant } S) \text{ pendant } dt$$

$$\text{Donc } \frac{dN}{dt} = - \oint_S \vec{j}_n \cdot \vec{dS}, \quad \text{et } \frac{dN}{dt} = \iiint_V \frac{\partial n_v}{\partial t} dV$$

$$\oint_S \vec{j}_n \cdot \vec{dS} = \iiint_V \text{div}(\vec{j}_n) dV \quad (\text{green ostrogradski})$$

$$\text{D'où, en identifiant : } \frac{\partial n_v}{\partial t} = - \text{div}(\vec{j}_n)$$

$$\text{Or, } \vec{j}_n = -D \vec{\text{grad}}(n_v) \quad (\text{loi de Fick}) \quad \text{et donc } \text{div}(\vec{j}_n) = -D \Delta n_v$$

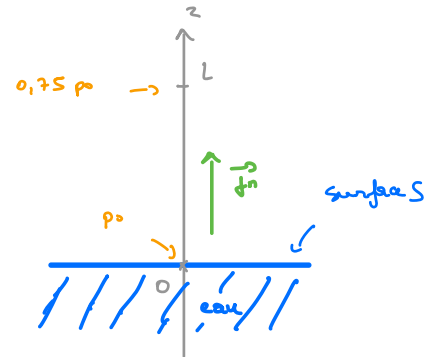
$$\text{finalement, } \frac{\partial n_v}{\partial t} = D \Delta n_v$$

2. En RS, $\frac{\partial n_v}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Delta n_v = 0 \Rightarrow n_v = az + b$

On utilise la loi des gaz parfaits pour la vapeur d'eau : $PV = nRT = Nk_B T \Rightarrow n_v = \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T}$

$$\text{Donc } n_v(z=0) = \frac{p_0}{k_B T} \quad \text{et } n_v(z=L) = 0,75 \frac{p_0}{k_B T}$$

$$\text{Ainsi, } b = \frac{p_0}{k_B T} \quad \text{et } a = - \frac{0,25 p_0}{k_B T L}$$



3. Le flux de particules au travers d'une surface S

$$\text{orthogonale à } (Oz) \text{ vaut } \Phi = \iint_S \vec{j}_n \cdot \vec{e}_z dS \quad \text{avec } \vec{j}_n = -D \vec{\text{grad}}(n_v) = -D \frac{\partial n_v}{\partial z} \vec{e}_z = -D a \vec{e}_z$$

$$\text{donc } \Phi = -D a S \quad \text{et pour un temps } \Delta t, \text{ le nombre de particules qui traversent } S$$

$$(\text{égal au nombre de particules qui s'évaporent}) \text{ vaut : } N_s = \Phi \Delta t = -D a S \Delta t$$

$$\text{La masse d'eau correspondante est } m = \frac{N_s}{N_A} M_{H_2O} = \frac{D \cdot 0,25 p_0 S \Delta t}{N_A k_B T L} \Rightarrow m = \frac{0,25 D p_0 S \Delta t M_{H_2O}}{R T L}$$

4. $\Phi = \frac{D(n_{v2} - n_{v1}) S}{L}$

$$\text{Et } R_{diff} = \frac{n_{v2} - n_{v1}}{\Phi} \quad \text{donc } R_{diff} = \frac{L}{DS}$$

A.N : $S = 2 \cdot 10^4 \text{ m}^2$
 $(1 \text{ ha} = 100 \times 100 \text{ m}^2)$
 $M_{H_2O} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$
 $m = 0,78 \text{ kg}$

Exercice 3

Une pièce rectangulaire de $5,0 \text{ m} \times 8,0 \text{ m}$, dont les murs ont une hauteur de $2,5 \text{ m}$ et une épaisseur de $E = 0,3 \text{ m}$, comprend une baie vitrée de $2,0 \text{ m} \times 1,8 \text{ m}$ et deux fenêtres de $1,2 \text{ m} \times 1,2 \text{ m}$, toutes les trois d'épaisseur de vitres $e = 2,0 \text{ mm}$.

L'intérieur de la pièce est à la température $T_1 = 19^\circ\text{C}$, et les deux grands murs avec baie et fenêtres donnent sur l'extérieur à la température $T_2 = 0^\circ\text{C}$. Il n'y a aucun échange thermique à travers les deux autres (petits) murs, le sol et le plafond, les appartements voisins étant à la même température T_1 .

Les conductivités thermiques du verre, d'un mur (béton+isolant) et de l'air sont $\lambda_v = 0,78 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\lambda_M = 0,10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et $\lambda_A = 0,026 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

1. Calculer les résistances thermiques R_v des vitres, R_M des murs concernés, puis R de l'ensemble. En déduire les flux thermiques Φ_v à travers les vitres, Φ_M à travers les murs concernés, et Φ_T à travers l'ensemble. Evaluer le rapport $\frac{\Phi_M}{\Phi_T}$.

Pour limiter les pertes par les parties vitrées, les vitres simples sont remplacées par du "double vitrage" : deux vitres d'épaisseur $e = 2,0 \text{ mm}$ séparées par une couche d'air sans convection et d'épaisseur $e' = 4,0 \text{ mm}$.

2. Calculer la résistance thermique d'une simple couche de vitre R_v , de la couche d'air comprise entre les deux couches de vitres R_A , puis du "double vitrage" dans son ensemble R_{DV} .

En déduire le flux thermique Φ_{DV} à travers le "double vitrage" et conclure. Que vaut alors le flux Φ'_T à travers l'ensemble murs + "double vitrage" ?

1. On est en régime stationnaire, en géométrie

1D avec des courants thermiques orthogonaux aux surfaces traversées, donc pour chaque

élément $R_{th} = \frac{l}{\lambda \cdot S} \rightarrow$ épaisseur traversée / surface traversée

$$R_{vitres} = \frac{e}{\lambda_v S_v} \quad \text{où } S_v = 2 \times 1,8 + 2 \times 1,2^2 = 6,5 \text{ m}^2$$

$$R_{murs} = \frac{E}{\lambda_M S_M} \quad \text{où } S_M = 2 \times 8 \times 2,5 - S_v = 33,5 \text{ m}^2$$

Ces deux résistances sont "en parallèle" (même ΔT de température, les flux thermiques s'ajoutent) donc $R = \frac{R_{vitres} R_{murs}}{R_{vitres} + R_{murs}}$

A.N. : $R_v = 3,94 \cdot 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ $\Phi_v = \frac{T_1 - T_2}{R_v} = 48,2 \text{ kW}$
 $R_{murs} = 8,96 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ $\Phi_M = \frac{T_1 - T_2}{R_M} = 0,2 \text{ kW}$
 $R = 3,93 \cdot 10^{-4} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ $\Phi_T = \frac{T_1 - T_2}{R} = 48,6 \text{ kW}$

l'essentiel du flux passe à travers les vitres - ces valeurs sont nettement surestimées ($\rightarrow$ utiliser la loi de Newton à l'interface) : surface de $6,5 \text{ m}^2$!

2. Pour la couche d'air (pour l'ensemble des vitres, donc un

$$R_A = \frac{e'}{\lambda_A S_v}$$

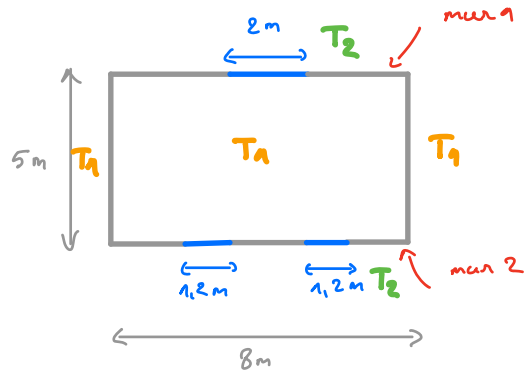
Les deux épaisseurs de vitre et la couche d'air sont

"en série" (traversées pour le même flux), donc

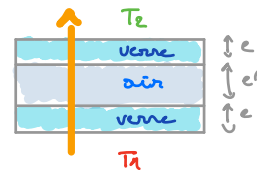
$$R_{ov} = R_v + 2 R_v \quad \text{La encore, } R' = \frac{R_{ov} R_{murs}}{R_{ov} + R_{murs}}$$

A.N. : $R_{ov} = 2,144 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ $\Phi'_T = \frac{T_1 - T_2}{R'} = 0,9 \text{ kW}$
 $R' = 1,92 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

l'isolation est trois nettement meilleure, le flux reste plus élevé au travers des vitres mais on gagne quasiment un facteur 10 -



flux thermique



Exercice 4

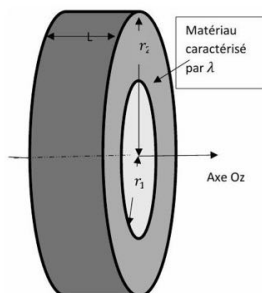
La loi phénoménologique de Fourier, relative à la diffusion thermique, traduit la proportionnalité entre la densité de flux thermique $\vec{J}_d$ et le gradient de température :

$$\vec{J}_d = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T).$$

1. Quels sont le nom et la dimension du coefficient λ ? En déduire son unité SI. Justifier physiquement le sens du vecteur densité de flux thermique $\vec{J}_d$.

On se place en coordonnées cylindriques pour étudier une situation physique stationnaire, unidimensionnelle à symétrie cylindrique, telle que la température en un point M (r, θ, z) ne dépend que de r .

Le gradient de la température $T(r)$ est égal à $\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \left(\frac{dT}{dr}\right) \vec{e}_r$.



On considère un cylindre conducteur thermique creux de longueur L , occupant l'espace $r_1 < r < r_2$ constitué d'un matériau de conductivité λ dans lequel il n'y a aucune source thermique dans le matériau.

2. Quand on effectue un bilan énergétique pour le matériau compris entre les cylindres de rayons r et $r + dr$, on obtient l'équation différentielle vérifiée par le flux thermique :

$$\frac{d(r \cdot J_d(r))}{dr} = 0.$$

En déduire la loi $T(r)$ en notant T_1 et T_2 les températures des rayons r_1 et r_2 :

$$T_1 = T(r = r_1) \text{ et } T_2 = T(r = r_2).$$

3. Exprimer la puissance thermique φ qui traverse le cylindre de rayon r et de longueur L , dans le sens des r croissants.

4. En déduire que la résistance thermique du cylindre s'exprime par $R = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

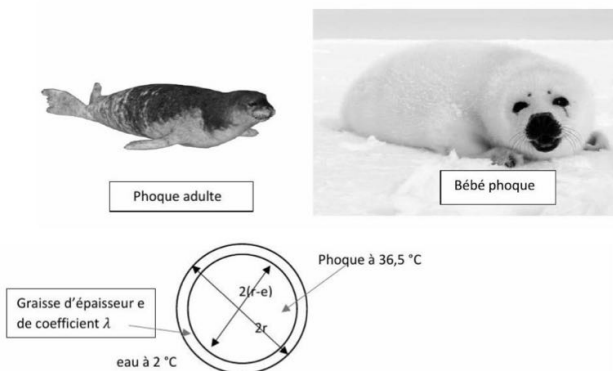
5. Prenons l'exemple d'un phoque marin de taille moyenne de masse $M = 150$ kg, vivant dans un océan à la température $\theta_0 = 2^\circ\text{C}$. On le modélise (figure 3) par un cylindre de longueur $L = 1,6$ m, de rayon $r = 25$ cm, qui ne perd de l'énergie que par sa surface latérale, considérée comme "partiellement isolée" de l'eau froide par une épaisseur $e = 50$ mm de graisse de coefficient caractéristique $\lambda = 7,0 \cdot 10^{-2}$ SI. Sa température d'existence est égale à $\theta_{eq} = 36,5^\circ\text{C}$ supposée uniforme. Il pêche 4,0 kg de poisson pour sa consommation journalière. Cette nourriture lui fournit une énergie de 4600 kJ par kg de poisson consommé.

Évaluer l'énergie thermique perdue par le phoque en une journée et la comparer à l'énergie apportée par sa nourriture.

6. Un bébé phoque a ses dimensions divisées par 2,5 par rapport au phoque adulte, y compris l'épaisseur e' de graisse. Justifier pourquoi sa masse vaut $m = 9,6$ kg.

Ses besoins métaboliques nécessitent une consommation de $5,0 \cdot 10^{-1}$ kg de poisson par jour. Son corps est entouré d'un duvet d'épaisseur $e'' = 10$ mm et de coefficient $\lambda'' = 1,0 \cdot 10^{-2}$ SI.

Évaluer la consommation de poisson journalière nécessaire à ce bébé phoque. Combien aurait-il dû consommer en plus par jour s'il n'avait pas eu de duvet protecteur ?



1. λ est la conductivité thermique en $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$
- $\Phi_{th} = j_a S$ $j_a = \lambda \left\| \vec{grad}(T) \right\|$
- $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 W $W \cdot m^{-2}$ m^2 $W \cdot m^{-2}$ $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$ $K \cdot m^{-1}$

$\vec{j}_a = -\lambda \vec{grad}(T)$: dirigé des hautes températures vers les basses températures

2. $\frac{d(n \cdot j_0(n))}{dn} = 0 \Rightarrow n \cdot j_0(n) = A \Rightarrow j_0(n) = \frac{A}{n}$ où A est une constante

Or, $\vec{j}_0 = -\lambda \vec{grad}(T) = -\lambda \frac{dT}{dn} \vec{e}_n \Rightarrow j_0(n) = -\lambda \frac{dT}{dn}$ donc $\frac{dT}{dn} = -\frac{A}{\lambda n}$

D'où $T = -\frac{A}{\lambda} \ln(n) + B$ ($B = c^{ste}$).

$T(n_1) = T_1$ et $T(n_2) = T_2$ donc $\begin{cases} T_1 = -\frac{A}{\lambda} \ln(n_1) + B \\ T_2 = -\frac{A}{\lambda} \ln(n_2) + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_2 - T_1 = -\frac{A}{\lambda} \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \\ T_1 = -\frac{A}{\lambda} \ln(n_1) + B \end{cases}$

On a donc $A = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{\ln(n_2/n_1)}$ et $B = T_1 + \frac{A}{\lambda} \ln(n_1) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(n_2/n_1)} \ln(n_1)$

D'où $T = \frac{T_2 - T_1}{\ln(n_2/n_1)} \ln(n) + T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln(n_2/n_1)} \ln(n_1)$

Et donc $T = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln(n_2/n_1)} \ln\left(\frac{n}{n_1}\right)$

3. $\Phi_{th} = \iint_S \vec{j}_0 \cdot \vec{e}_n dS$ avec $\vec{j}_0 = -\lambda \vec{grad}(T) = \lambda \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(n_2/n_1)} \cdot \frac{1}{n} \vec{e}_n$

Donc $\Phi_{th} = \iint_S \lambda \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(n_2/n_1)} \cdot \frac{1}{n} \underbrace{\vec{e}_n \cdot \vec{e}_n}_{=1} dS = \lambda \frac{(T_1 - T_2)}{\ln(n_2/n_1)} \cdot \frac{1}{n} \iint_S dS$ (n est constant sur la surface d'intégration)

Or, $\iint_S dS = 2\pi n L$ donc $\Phi_{th} = \frac{2\pi L \lambda (T_1 - T_2)}{\ln(n_2/n_1)}$

4. $T_1 - T_2 = R_{th} \Phi_{th}$, donc $R_{th} = \frac{\ln(n_2/n_1)}{2\pi L \lambda}$

5. $\Phi_{th} = \frac{Q_{eq} - Q_0}{R_{th}}$ et $E_{th} = \Phi_{th} \Delta t$ (où E_{th} est l'énergie perdue par conduction thermique pendant un temps Δt).

A.N : $E_{th} = 9400 \text{ kJ}$ pour $\Delta t = 1$ jour

L'apport calorifique des poissons consommés, de 18400 kJ par jour est à priori suffisant ---

6. Le volume, et donc la masse, sont divisés par $2,5^3$ ---
- On doit ajouter à la résistance thermique de la garniture R_1 , calculée comme pour le phoque adulte avec une épaisseur moindre, celle du duvet notée R_2 . Ces 2 résistances sont "en série".

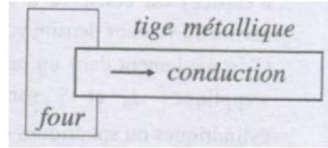
$R_1 = \frac{\ln\left(\frac{n_1}{n_1 - e_1}\right)}{2\pi L' \lambda_{garniture}}$ et $R_2 = \frac{\ln\left(\frac{n_1 + e_2}{n_1}\right)}{2\pi L' \lambda_{duvet}}$ $R = R_1 + R_2$

A.N : $R_1 = 0,79 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ $R_2 = 2,37 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ $R = 3,16 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$

L'énergie perdue en 1 jour vaut 935 kJ . Il faut environ $0,2 \text{ kg}$ de poisson pour couvrir cette perte d'énergie, donc $0,7 \text{ kg}$ au total. En l'absence de duvet, il en faudrait environ $0,4 \text{ kg}$ de plus ---

Exercice 5

Une tige cylindrique de longueur L (à conduction axiale et calorifugée sur la paroi latérale) est initialement à la température uniforme T_2 (celle de l'air environnant) et à $t = 0$, on lui applique une température T_1 en $x = 0$ (extrémité encastrée dans un four, voir le schéma, alors qu'elle demeure à T_2 en $x = L$; il s'instaure alors un régime transitoire.



Estimer la durée τ d'établissement du régime permanent pour une tige d'acier pour laquelle $\lambda = 82 \text{ W.m}^{-1}\text{.K}^{-1}$
 $c = 0,46.10^3 \text{ J.kg}^{-1}\text{.K}^{-1}$ et $\rho = 7,8.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ pour des longueurs $L = 25 \text{ cm}$ et $L = 50 \text{ cm}$.

Il s'agit simplement de calculer un temps caractéristique de diffusion :

En notant L et T une distance et un temps caractéristiques, l'analyse dimensionnelle de l'équation de diffusion $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$ donne $\rho c \frac{T}{T} = \lambda \frac{T}{L^2}$ ← c'est plutôt une variation caractéristique de T
 et donc
$$\tau = \frac{\rho c L^2}{\lambda}$$

A.N : $L = 25 \text{ cm} : \tau \sim 2700 \text{ s} (\sim 45 \text{ min})$
 $L = 50 \text{ cm} : \tau \sim 10800 \text{ s} (\sim 3 \text{ heures})$

ce sont de toutes façons des ordres de grandeur, inutile de chercher à être précis !

Ce sont des valeurs "élevées", même pour un bon conducteur thermique.
 La diffusion thermique est un mécanisme fondamentalement "lent",
 typiquement $\tau \gg 1 \text{ s}$.

Exercice 6

On considère le sous sol comme un milieu semi-infini homogène de conductivité thermique λ , de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c . On donne $a = \lambda/\rho c = 6.10^{-7}$ SI. On suppose que la température à la surface du sol est soumise à des variations de température de la forme $T_s(t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$.

1) Donner la dimension du coefficient a introduit ci-dessus

2) Déterminer la température $T(x, t)$ en un point de profondeur x en utilisant la notation complexe :

$$\underline{T}(x, t) = T_0 + \underline{f}(x) \exp(i\omega t)$$

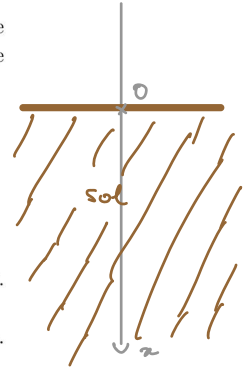
3) Déterminer la vitesse de propagation de cette onde thermique

4) On considère des variations journalières de température, entre 0°C et 16°C . Calculer la vitesse de propagation.

A partir de quelle profondeur les variations sont-elles inférieures à 1°C ?

5) On considère des variations annuelles de température, entre -10°C et 26°C . Calculer la vitesse de propagation.

A partir de quelle profondeur les variations sont-elles inférieures à 1°C ?



1. $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T$ donc $\frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{a}_{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} \Delta T$ avec $a = \frac{\lambda}{\rho c}$, a est en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

2. On injecte $\underline{T} = T_0 + \underline{f} e^{i\omega t}$ dans l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = i\omega \underline{f} e^{i\omega t} \text{ et } \Delta T = \frac{d^2 \underline{f}}{dx^2} e^{i\omega t} \quad (\text{situation 1D})$$

D'où $i\omega \underline{f} e^{i\omega t} = a \frac{d^2 \underline{f}}{dx^2} e^{i\omega t}$ et donc $\boxed{\frac{d^2 \underline{f}}{dx^2} = \frac{i\omega}{a} \underline{f}}$

Or, $i = \left(+i, \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^2$ donc les solutions sont de la forme $\underline{f} = A e^{\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{a}} x} + B e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{a}} x}$

On doit avoir $A = 0$ car cette partie de la solution diverge pour $x \rightarrow \infty$.

On pose $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2a}{\omega}}}$ et $\underline{f} = B e^{-\frac{(1+i)x}{\delta}}$

D'où $\underline{T} = T_0 + B e^{-x/\delta} e^{-ix/\delta} e^{i\omega t} = T_0 + B e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)}$

On identifie avec la condition aux limites $\underline{T}(x=0) = T_0 + \theta_0 e^{i\omega t}$, ce qui donne $B = \theta_0$.

En prenant la partie réelle, on obtient finalement : $\boxed{T = T_0 + \theta_0 e^{-x/\delta} \cos(\omega t - x/\delta)}$

3. On peut poser $k = \frac{1}{\delta}$ pour écrire le terme de propagation en $\cos(\omega t - kx)$

Alors $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \omega \delta = \omega \sqrt{\frac{2a}{\omega}} = \sqrt{2a\omega}$ (et on peut montrer que $v_\phi = 2v_\ell$)

4. et 5. Il s'agit d'AN, la profondeur pour avoir une amplitude de variation

$\theta_1 = 1^\circ\text{C}$ vérifie $\theta_0 e^{-x/\delta} = \theta_1 \Rightarrow x = \delta \ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)$

• variations journalières : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec $T = 1 \text{ jour} = 86400 \text{ s} \Rightarrow \omega = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$

$0 - 16^\circ\text{C}$: $\theta_0 = 8^\circ\text{C}$

$v_\phi = 9,4 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$ ($9,4 \mu\text{m/s}$; $3,4 \text{ cm/h}$)

$\delta = 0,13 \text{ m}$ (13 cm) et $x = \delta \ln(8) = 27 \text{ cm}$

• variations annuelles : $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = 1 \text{ an} = 31536000 \text{ s} \Rightarrow \omega = 2 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$

$-10 - 26^\circ\text{C}$: $\theta_0 = 18^\circ\text{C}$

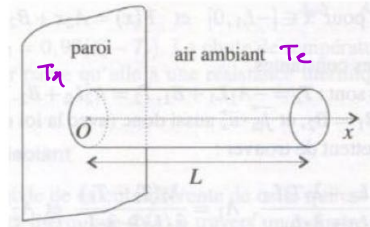
$v_\phi = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}$ ($0,5 \mu\text{m/s}$; $4,3 \text{ cm/jour}$)

$\delta = 2,5 \text{ m}$ et $x = \delta \ln(18) = 7 \text{ m}$

Exercice 7

Une ailette de refroidissement, constituée par un cylindre d'axe (Ox) , rayon r et longueur L , est fixée par sa base $x = 0$ sur une paroi dont la température est T_1 . La paroi et l'ailette sont en contact avec l'air ambiant de température T_e , avec lequel ils ont des échanges thermiques régis par la loi de Newton avec un coefficient de transfert surfacique h . On souhaite calculer le flux thermique passant de la paroi à l'air ambiant par l'intermédiaire de l'ailette. On se place en régime stationnaire et on fait l'hypothèse que la température dans l'ailette ne dépend que de x .

On prendra les valeurs numériques suivantes : $r = 1 \text{ mm}$, $L = 10 \text{ cm}$, $\lambda = 400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $h = 150 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, $T_1 = 400 \text{ K}$ et $T_e = 300 \text{ K}$.



1. En appliquant le premier principe à la portion d'ailette comprise entre x et $x + dx$ montrer que la température T de l'ailette vérifie l'équation suivante :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{2h}{r\lambda} (T(x) - T_e)$$

2. Montrer que $T(x)$ peut se mettre sous la forme : $T(x) = A \exp\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) + T_e$. Donner l'expression de δ et calculer sa valeur numérique.

3. Comment écrire la condition aux limites en $x = 0$ et $x = L$?

On admettra que ces conditions aux limites conduisent aux expressions suivantes, avec $\beta = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$ et $\alpha = \frac{\lambda}{\delta h}$:

$$A = \frac{(T_1 - T_e) \beta \exp\left(-2\frac{L}{\delta}\right)}{1 + \beta \exp\left(-2\frac{L}{\delta}\right)} \quad B = \frac{T_1 - T_e}{1 + \beta \exp\left(-2\frac{L}{\delta}\right)} \quad \underline{A + B = T_1 - T_e}$$

4. Calculer numériquement α , β , L/δ , A et B ainsi que la température $T(x = L)$ et vérifier la condition aux limites en $x = L$.

1. En régime stationnaire l'énergie interne dans le volume V reste constante, et donc la somme des flux entrants est nulle : $\phi(x) + \phi(x+dx) + \phi_{ec} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \phi(x) &= \vec{f}_a(x) \cdot \vec{e}_x S \\ &= f_a(x) S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(x+dx) &= \vec{f}_a(x+dx) \cdot (-\vec{e}_x) S \\ &= -f_a(x+dx) S \end{aligned}$$

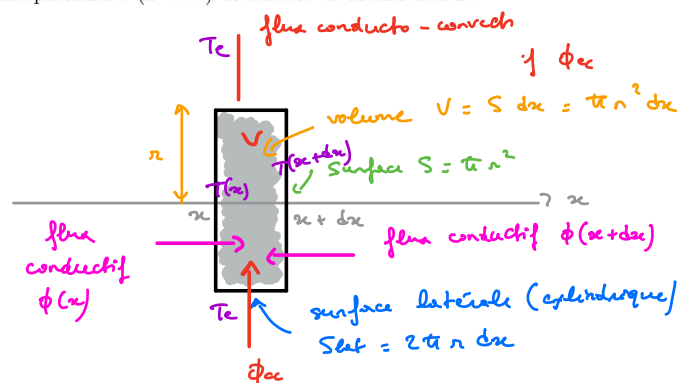
$$\text{Avec la loi de Newton, } \phi_{ec} = h S_{lat} (T_e - T)$$

$$\text{On a donc } S(f_a(x) - f_a(x+dx)) + h S_{lat} (T_e - T) = 0$$

$$\text{Or, } f_a(x) - f_a(x+dx) = -\frac{\partial f_a}{\partial x} dx \quad \text{et} \quad \vec{f}_a = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x \Rightarrow f_a = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\text{et donc } -\frac{\partial f_a}{\partial x} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\text{Ainsi, } S \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + h S_{lat} (T_e - T) = 0$$



On, $S = \pi r^2$ et $S_{lat} = 2\pi r \delta$, donc :

$$\cancel{\pi r^2} \lambda \cancel{dx} \frac{d^2 T}{dx^2} + h \cancel{2\pi r} \cancel{dx} (T_e - T) = 0$$

$$\text{Soit } \boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{2h}{\lambda r} (T - T_e)}$$

2. On pose $\delta = \sqrt{\frac{\lambda r}{2h}}$ pour avoir $\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T = -\frac{1}{\delta^2} T_e$

solution homogène : $A e^{x/\delta} + B e^{-x/\delta}$) d'où la forme proposée

solution particulière : T_e

A.N : $\delta = 0,0365 \text{ m}$ (δ est homogène à une longueur)

3. En $x=0$, $T(x=0) = T_1$

En $x=L$ c'est plus délicat : on considère la continuité entre le fluide conducteur et le fluide conducto-convectif.

$$\text{D'où } \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x=L) = h(T_e - T(x=L))$$

4. $\alpha = \frac{\lambda}{\delta h} = 7,3$ (sans dimension)

$$A = 0,4 \text{ K}$$

$$B = 39,6 \text{ K}$$

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = 0,973$$

$$T(x=L) = T_e + A e^{L/\delta} + B e^{-L/\delta} = 312,7 \text{ K}$$

$$e^{-\frac{2L}{\delta}} = 0,00417$$

on vérifie la C.L :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{A}{\delta} e^{x/\delta} - \frac{B}{\delta} e^{-x/\delta} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x}(x=L) = -4,76 \text{ K.m}^{-1} \Rightarrow \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(x=L) = -1904 \text{ W.m}^{-2}$$

et $h(T_e - T(x=L)) = -1905 \text{ W.m}^{-2}$ donc c'est ok aux approximations numériques près -

5. Expliquer pourquoi le flux thermique passant de la paroi à l'ailette est égal à celui qui passe de l'ailette à l'air, donner son expression et calculer sa valeur numérique.

6. Que vaudrait le flux thermique échangé avec l'air en l'absence d'ailette (pour une même surface de paroi) ?

7. Définir et calculer numériquement l'efficacité de l'ailette (en termes d'énergie échangée avec l'air) et comparer avec la valeur de α .

5. En régime stationnaire, la puissance thermique qui entre dans l'ailette (au niveau de l'interface avec la paroi) doit être égale à celle qui sort (au niveau de l'interface avec l'air, sur les cotés et au bout).

$$\Phi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}(x=0) \text{ et } \frac{\partial T}{\partial x}(x=0) = \frac{1}{\delta} (A - B) \text{ donc } \boxed{\Phi = \frac{\lambda S}{\delta} (B - A)} \text{ A.N : } \Phi = 3,4 \text{ W}$$

6. En l'absence d'ailette, on aurait simplement le flux conducto-convectif sur une surface S de paroi : $\Phi' = h S (T_1 - T_e)$ A.N : $\Phi' = 0,047 \text{ W}$

7. L'efficacité de l'ailette est $\eta = \frac{\Phi}{\Phi'}$ A.N : $\eta = 72$ On voit que c'est très proche de α (qui vaut 73)

Rem : en remarquant que $T_1 - T_e = A + B$ (voir expressions) on peut écrire $\eta = \frac{\lambda}{\delta h} \frac{B - A}{B + A}$ -

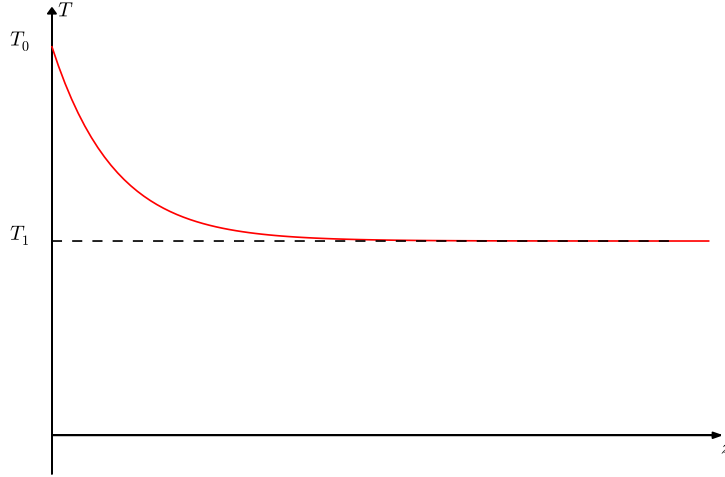
TD 15 correction exercice 8

1. La hauteur d'eau dans le puits suit les marées (période de l'ordre de 12h) mais pas les variations dues aux vagues (de période beaucoup plus courte), le puits agit donc comme un filtre passe bas sur les variations de hauteur d'eau.
2. En considérant la pente du dernier segment, on trouve un gradient de l'ordre de $0,7 K.m^{-1}$.
3. On note z la coordonnée spatiale dont dépend la température et on considère une petite tranche de matériau de section s (orthogonale à (Oz)) et d'épaisseur dz , comprise entre z et $z + dz$. On lui applique le premier principe pour une évolution infinitésimale qui dure un temps dt : $dH = \delta Q$ (évolution à pression constante). Or, $H = s dz \mu c T$ ($s dz \mu$ est la masse de la tranche de matériau) et donc $dH = s dz \mu c dT$.
D'autre part, $\delta Q = ((j_Q(z) - j_Q(z + dz)) s + dz p) dt$ (énergie reçue par la tranche pendant le temps dt).
Comme $j_Q(z) - j_Q(z + dz) = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} dz$, on a $s dz \mu c dT = \left(-\frac{\partial j_Q}{\partial z} dz s + dz p \right) dt$, soit $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial z} + \frac{p}{s}$.
En utilisant la loi de Fourier qui donne $j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$, on a finalement $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{p}{s}$, soit $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \alpha p$ avec $D = \frac{\lambda}{\mu c}$ et $\alpha = \frac{1}{\mu c s}$.
4. Si il n'y a pas d'échanges au travers des parois $p = 0$ et comme on est en régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, donc $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$. La température est une fonction affine de z et le gradient est uniforme.
5. La bonne expression est la (3) : $r_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda'} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$
(1) est fausse car r_{th} doit être positive
(2) est fausse car elle n'est pas homogène à une résistance thermique multipliée par une longueur
(4) est fausse car r_{th} doit diminuer si λ' augmente (et ce n'est pas homogène...)
(5) est fausse car r_{th} doit augmenter et non diminuer si l'épaisseur $(R_2 - R_1)$ augmente
6. On part de $D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \alpha p = 0$ (régime stationnaire). Or $p = \frac{1}{r_{th}} (T_1 - T)$ (il s'agit de la puissance entrante), on a donc $D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\alpha}{r_{th}} (T_1 - T) = 0$. On remplace D et α pour obtenir $\frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu c s r_{th}} (T_1 - T) = 0$, soit $\frac{d^2 T}{dz^2} - k^2 T = -k^2 T_1$ avec $k = \sqrt{\frac{1}{\lambda s r_{th}}}$.
7. Les solutions s'écrivent comme la somme d'une solution homogène T_h et d'une solution particulière T_p .
 T_h est solution de $\frac{d^2 T}{dz^2} - k^2 T = 0$, donc de la forme $T_h(z) = \mu e^{kz} + \nu e^{-kz}$, et la constante μ est nécessairement nulle car le terme en e^{kz} devient rapidement très grand et ne constitue pas une solution physiquement acceptable, donc on retient $T_h(z) = \nu e^{-kz}$. Pour la solution particulière, on vérifie facilement que $T_p = T_1$ convient. Les solutions complètes sont donc de la forme $T(z) = \nu e^{-kz} + T_1$, et la

condition aux limites $T(z = 0) = T_0$ implique que $T_0 = \nu + T_1$, soit $\nu = T_0 - T_1$ (l'autre condition aux limites, $T(z = L) = T_1$, est «naturellement» vérifiée du fait que $e^{-kL} \ll 1$, voir les ordres de grandeur calculés plus loin).

La solution compte tenu des conditions initiales est donc $T(z) = (T_0 - T_1)e^{-kz} + T_1$, on a donc $a = T_0 - T_1$ et $b = T_1$.

8.



Il faut faire attention au fait qu'ici z représente la profondeur ((Oz) vers le bas) alors que sur le document c'est l'altitude qui est en abscisses. La forme obtenue est à priori satisfaisante.

9. $T(z) = (T_0 - T_1)e^{-kz} + T_1$ donc $\overrightarrow{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z = -k(T_0 - T_1)e^{-kz} \vec{e}_z$. Ce gradient de température est bien vers le haut ($\vec{e}_z$ est vers le bas) et $\|\overrightarrow{grad}(T)\|(z = 0) = k(T_0 - T_1)$.

10. On trouve $r_{th} = 0,14 W^{-1}.m.K$; $k = 13,5 m^{-1}$ et $\|\overrightarrow{grad}(T)\|(z = 0) = 20 K.m^{-1}$. Cette dernière valeur est clairement trop élevée !