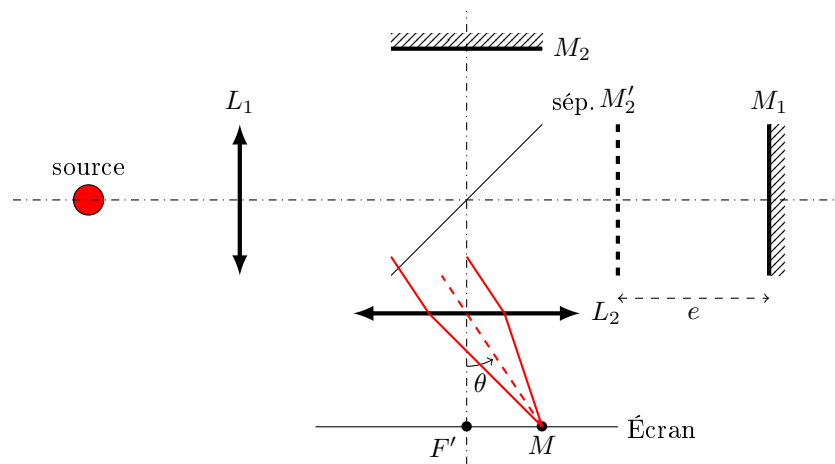


L'indice et le froid

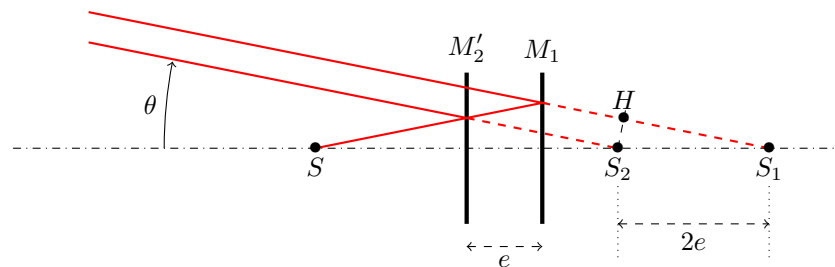
I Vérification de la loi de Gladstone–Dale

- Il suffit d'admettre l'équation des gaz parfaits écrite sous la forme $PM = \rho RT$ où ρ est la masse volumique du gaz, P sa pression, T sa température, M sa masse molaire et R la constante polaire des gaz parfaits pour écrire $\rho = \frac{PM}{RT}$ donc $n - 1$ est alors bien proportionnel à P/T donc, à température constante, $n - 1$ est proportionnel à P .
- Le schéma demandé est classique et comporte au moins une lentille pour focaliser le plan de localisation sur celui de l'écran. Une autre permet d'obtenir un éclairage quasiment parallèle. Le schéma fait apparaître l'image M'_2 de M_2 à travers la séparatrice (compensée). Pour former des anneaux les miroirs sont perpendiculaires, donc M'_2 et M_1 sont parallèles.



Deux rayons interfèrent en un point M du plan focal image de la lentille s'ils parviennent des deux voies sous le même angle θ ; ils proviennent alors de deux sources fictives, images d'un point P de la source vraie au travers des deux miroirs. Comme ceux-ci sont distants de e , les sources sont distantes de $2e$; la réflexion sur chacun des miroirs introduisant la même différence de marche $\lambda_0/2$, les sources secondaires S_1 et S_2 sont en phase donc

$$\delta = S_2H = 2e \cos \theta \quad \text{avec par ailleurs} \quad r = F'M = f' \tan \theta.$$



Au troisième ordre près, $\tan \theta = \theta$ et $\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$ donc $\delta = 2e \left[1 - \frac{r^2}{2f'^2} \right]$ donc au centre $\theta = 0$ et $\delta_0 = 2e$ soit

encore $r = f' \sqrt{2 \left[1 - \frac{\delta}{\delta_0} \right]}$; l'anneau central brillant étant d'ordre k_0 et de numéro 0, il correspond à $\delta_0 = k_0 \lambda_0$;

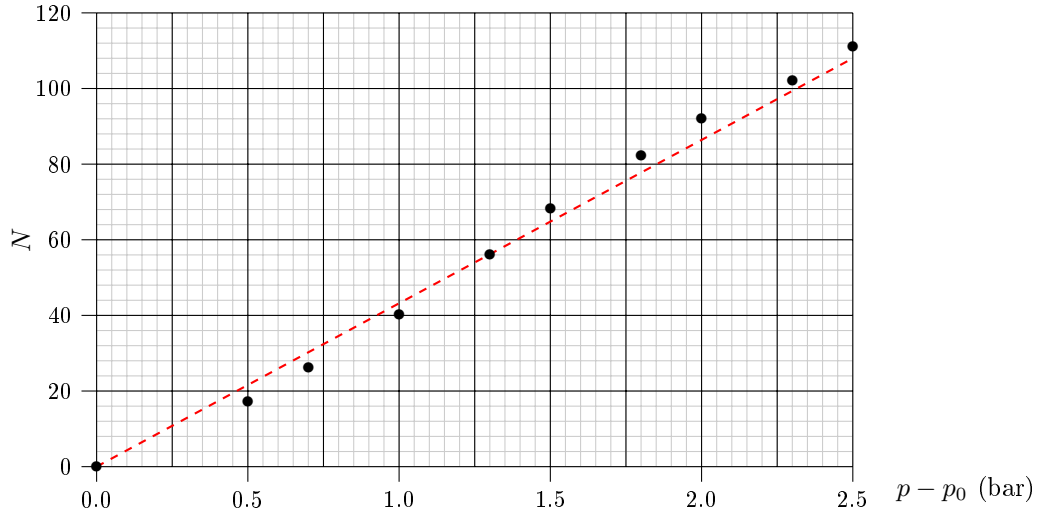
les suivants (numéro $k = 1, 2, \dots$) correspondent à $\delta = (k_0 - k) \lambda_0$ donc $1 - \frac{\delta}{\delta_0} = \frac{k \lambda_0}{\delta_0}$ et $r_k = f' \sqrt{\frac{2k \lambda_0}{\delta_0}}$.

- Les rayons lumineux qui traversent la cuve sur un aller-et-retour ont pour chemin optique total $2nL$ à comparer à $2n_0L$ pour l'épaisseur correspondante sans cuve; on a donc $\delta_{\text{sup}} = 2(n - n_0)L$. Par ailleurs, une frange défile

à chaque fois que la différence de marche varie de λ_0 donc $\delta_{\text{sup}} = N \lambda_0$. On en déduit $N = \frac{a}{T_0} (P - P_0) \frac{2L}{\lambda_0}$.

- Il faudrait vérifier le bon alignement de la droite donnant $n - n_0$ en fonction de $P - P_0$; la pente de celle-ci est $q = \frac{2aL}{T_0 \lambda_0}$. Le schéma ci-dessous montre cet alignement et permet de proposer la valeur $q = \frac{108}{2,5} = 43,2$ donc

$a = 8,6 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{bar}^{-1}$ ou $a = 8,6 \cdot 10^{-7} \text{ K} \cdot \text{Pa}^{-1}$. Avec un oputil de calcul on pourrait chercher la pente de la droite qui minimise la somme des écarts quadratiques entre les points expérimentaux et la droite modèle (méthode des moindres carrés, *linear fit*).



5. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit $m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - m_e\Gamma\vec{v} - m_e\omega_0^2\vec{r}$ à condition de négliger la partie magnétique de la force de Lorentz; ceci résulte de l'approximation **non relativiste** puisque l'équation de Maxwell-Faraday impose, pour une OPPM, la relation $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$ donc $\|\vec{B}\| \leq \frac{1}{v_\varphi} \|\vec{E}\|$; on en déduit donc aussi $\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \leq \frac{v}{v_\varphi} \|\vec{E}\| \ll \|\vec{E}\|$ si $v \ll v_\varphi \sim c$. En notation complexe, on cherche des solutions de la forme $\vec{v} = \vec{v}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ donc $\frac{d\vec{v}}{dt} = i\vec{v}[\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}]$ mais ici encore $v \ll v_\varphi$ donc $\|\vec{k} \cdot \vec{v}\| \leq \omega \frac{v}{v_\varphi} \ll \omega$ et on

confondra donc la dérivation avec $i\omega$; de même $\vec{r} = \frac{\vec{v}}{i\omega}$ et $\vec{v} = -\frac{e}{m_e} \frac{\vec{E}}{i\omega + \Gamma + \frac{\omega_0^2}{i\omega}}$.

6. La même méthode fournirait une vitesse des ions beaucoup plus faible à cause de leur **forte masse**; celle du proton est au moins de l'ordre de 2000 fois celle de l'électron. Tenant enfin compte de la présence de *deux* électrons par molécule, la densité volumique de courant $\vec{j} = -2n^*e\vec{v}_e$ s'écrit donc $\vec{j} = 2 \frac{n^*e^2}{m_e} \frac{i\omega}{-\omega^2 + i\omega\Gamma + \omega_0^2} \vec{E}$ qui prend la forme de l'énoncé si on pose $\kappa = 2$.

7. Il s'agit manifestement d'un filtre **passé bande** puisque $\gamma \sim \frac{n^*e^2}{m_e} \frac{i\omega}{\omega_0^2} \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow 0$ tandis que $\gamma \sim \frac{n^*e^2}{m_e} \frac{1}{i\omega} \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow \infty$. On le reconnaît aussi sous la forme canonique $\gamma = \frac{n^*e^2}{m_e\Gamma} \frac{1}{1 + iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ à condition de poser

$Q = \frac{\omega_0}{\Gamma}$ donc la pulsation de résonance est ω_0 et $\gamma_0 = \frac{n^*e^2}{m_e\Gamma}$ donc on a aussi $\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$. Le

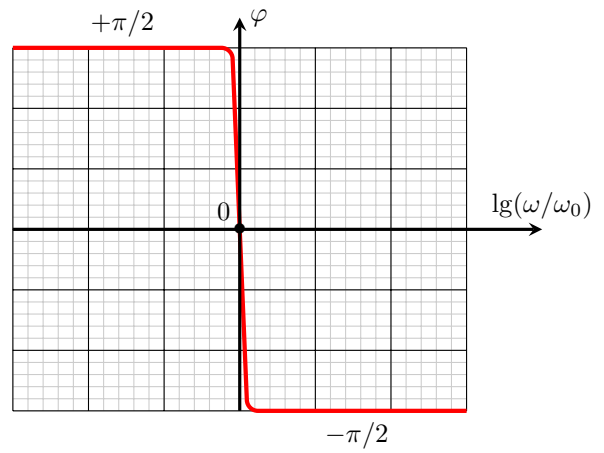
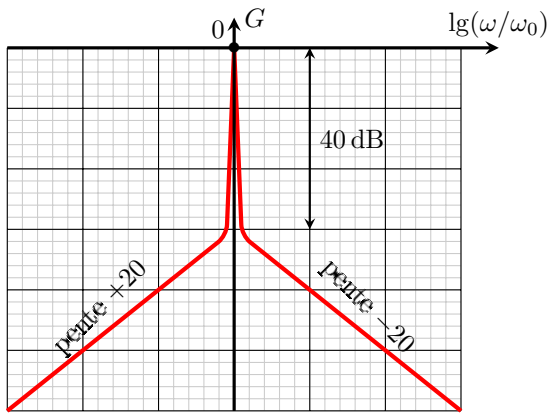
tracé du diagramme de Bode asymptotique, en gain et en phase, montre une résonance très aiguë (page suivante).

8. Dans un milieu neutre $\rho = 0$; on peut donc écrire $\text{div} \vec{E} = 0$, $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\text{div} \vec{B} = 0$ tandis que l'équation

de Maxwell-Ampère s'écrit $\text{rot} \vec{B} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0\gamma\vec{E}$. En notation complexe, on peut donc aussi écrire cette dernière relation sous la forme $\text{rot} \vec{B} = \epsilon_0\mu_0 i\omega\vec{E} \left[1 + \frac{\gamma}{\epsilon_0 i\omega}\right]$ qui est la même relation que dans le vide en remplaçant ϵ_0 par $\epsilon_0\epsilon_r$ en posant

$\epsilon_r = 1 + \frac{\gamma}{\epsilon_0 i\omega}$. On obtiendra alors l'équation de d'Alembert $\Delta \vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$.

9. Si on néglige les frottements, $\Gamma = 0$; de plus si $\omega \ll \omega_0$ on aura $\gamma \simeq \frac{n^*e^2 i\omega}{m_e\omega_0^2}$ donc $\epsilon_r = 1 + \frac{2n^*e^2}{m_e\epsilon_0\omega_0^2}$.



La célérité de propagation vérifie $\frac{1}{v^2} = \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r = \frac{n^2}{c^2}$ donc $n^2 = \epsilon_r$ ou $n^2 - 1 = \frac{2n^* e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2} = (n-1)(n+1)$ donc au premier ordre $n-1 = \frac{1}{n+1} \frac{2n^* e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2} \simeq \frac{n^* e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2}$ et $n \simeq 1 + \frac{n^* e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0^2}$.

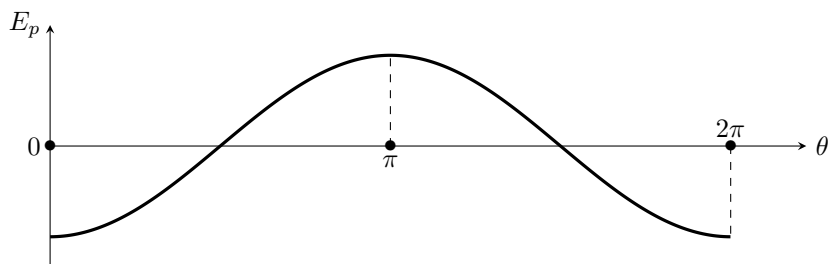
10. La densité particulaire n^* apparaît ici encore dans l'équation d'état $P = n^* k_B T$ donc $n = 1 + \frac{P e^2}{m_e k_B T \epsilon_0 \omega_0^2}$ donc aussi $n_0 = 1 + \frac{P_0 e^2}{m_e k_B T \epsilon_0 \omega_0^2}$ donc par différence $n - n_0 = \frac{a}{T_0} (P - P_0)$ où $a = \frac{e^2}{m_e k_B \epsilon_0 \omega_0^2}$. On en déduit $\omega_0 \simeq 1,5 \cdot 10^{16}$ rad/s qui est dans le domaine des ultraviolets proches; la condition $\omega \ll \omega_0$ est donc vérifiée dans le domaine visible.

II Refroidissement par désaimantation adiabatique

11. Les positions d'équilibre correspondant à l'annulation du moment donc à $\vec{\mu} \wedge \vec{B} = 0$ lorsque les deux vecteurs sont colinéaires, de même sens ou de sens contraire. Si on s'écarte un peu de l'état où $\vec{\mu}$ et \vec{B} sont de même sens (ci-dessous à gauche), le couple de forces ramène $\vec{\mu}$ vers \vec{B} : l'équilibre est stable. Évidemment (ci-dessous à droite) le cas où $\vec{\mu}$ et \vec{B} sont de sens contraire correspond à un équilibre instable.



Posant encore $E_p = -\mu B \cos \theta$ où θ est l'angle entre les deux vecteurs on retrouve le même résultat :



12. Dans un mouvement circulaire \vec{r} est perpendiculaire à \vec{v} donc $L = m_e r v$. On peut aussi écrire $i = -\frac{e}{\tau}$ où $v = \frac{2\pi r}{\tau}$ donc $i = \frac{ev}{2\pi r}$. Le moment magnétique correspondant est $\mu = \pi r^2 i$ donc $\mu = \frac{evr}{2}$ ou encore $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}$ qui est dirigé selon la normale à la surface donc colinéaire à \vec{L} mais de sens contraire du fait du signe de la charge de l'électron. Comme par ailleurs $L = p\hbar$ on en déduit $\mu = p\mu_B$ avec $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,3 \cdot 10^{-24}$ A · m²
13. La loi de probabilité de Boltzmann s'écrit $P_k = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_k}{k_B T}\right)$ avec $E_k = -g\mu_B B$ donc $x = \frac{g\mu_B B}{k_B T}$.

14. La normalisation de la probabilité impose $\sum_k P_k = 1$ donc $Z = \sum_{k=-m}^m \exp(kx)$ qui est la somme de termes d'une suite géométrique de raison e^x . On en déduit $Z = \frac{e^{-mx} - e^{(m+1)x}}{1 - e^x}$ ou, en mettant en facteur $e^{x/2}$ au

$$Z = \frac{\text{sh}\left(\left(2m+1\right)\frac{x}{2}\right)}{\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

15. Par définition de la moyenne d'une variable aléatoire, $\langle \mu_z \rangle = \sum P_k k g \mu_B$ donc $\langle \mu_z \rangle = \frac{g \mu_B}{Z} \sum x e^{kx}$ avec

$$Z = \sum e^{kx} \text{ donc } \frac{dZ}{dx} = \sum x e^{kx} \text{ donc } \langle \mu_z \rangle = g \mu_B \frac{d}{dx} \ln Z(x)$$

$$\left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\text{ch}\left(\left(2m+1\right)\frac{x}{2}\right)}{\text{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2} \frac{\text{sh}\left(\left(2m+1\right)\frac{x}{2}\right)}{\text{sh}^2\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ donc finalement } M = M_\infty \left\{ \frac{m + \frac{1}{2}}{\text{th}\left[\left(m + \frac{1}{2}\right)x\right]} - \frac{\frac{1}{2}}{\text{th}\left[\frac{x}{2}\right]} \right\}$$

à condition de poser $M_\infty = n^* g \mu_B$.

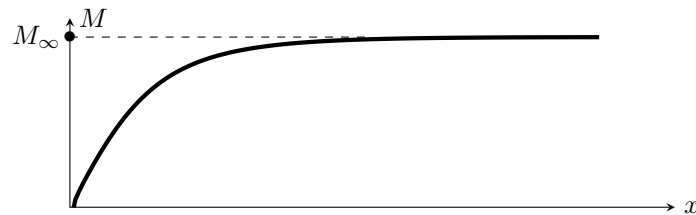
16. On doit mener le développement à l'ordre 3 avec $\text{th}(t) = t \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)$ donc $\frac{1}{\text{th}(t)} = \frac{1}{t} \left(1 + \frac{t^2}{3}\right) = \frac{1}{t} + \frac{t}{3}$ donc

$$\text{aussi } M = M_\infty \frac{x}{3} \left[\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right] \text{ soit enfin } M = \gamma \frac{B}{T} \text{ avec } \gamma = \frac{n^* g^2 \mu_B^2}{k_B} m(m+1)$$

17. La limite $x = \frac{g \mu_B B}{k_B T} \rightarrow 0$ est la limite de désordre pour laquelle toutes les valeurs de k sont équiprobables ;

dans cette situation de désordre maximal il est normal que $M \rightarrow 0$. De même la limite limite $x = \frac{g \mu_B B}{k_B T} \rightarrow \infty$

est la limite d'ordre pour laquelle tous les moments dipolaires sont alignés sur la valeur la plus probable ; il y a donc saturation du moment dipolaire magnétique dans sa valeur maximale, $M \rightarrow M_\infty$. Le tracé de la courbe est proposé ci-dessous.



Numériquement, $\chi = \frac{\mu_0 n^* g^2 \mu_B^2}{T k_B} m(m+1) = 3,8 \cdot 10^{-5}$ avec les données proposées ici, compatible avec la mesure donnée par l'énoncé.

18. Pour un gaz soumis à des forces de pression, l'identité thermodynamique s'écrit $dU = T ds - PdV$ donc l'équivalent du terme volumique $B dM$ serait le terme extensif $-P dV$. Posant $h = u - BM$, $dh = T ds - M dB$.

$$\text{Comme } dh = c_B dT \text{ on peut écrire } ds = \frac{c_B}{T} dT + \gamma \frac{B}{T^2} dB$$

19. Appliquant le lemme de Schwarz à cette identité il vient $\frac{\partial}{\partial B} \frac{c_B}{T} = \frac{\partial}{\partial T} \gamma \frac{B}{T^2}$ donc $\frac{\partial c_B}{\partial B} = -2\gamma \frac{B}{T^2}$. L'intégration

de cette relation relativement à B fournit $c_B(B, T) = c_B(B = 0, T) + \int_0^B -2\gamma \frac{B'}{T^2} dB'$ ou, compte tenu de

$$\text{l'indication de l'énoncé, } c_B = \frac{\alpha - \gamma B^2}{T^2}$$

20. Du fait du caractère isentropique de la désaimantation, $ds = 0$ impose $c_B dT = -\gamma \frac{B}{T} dB$ lors de cette opération,

$$\text{soit aussi } \frac{dT}{T} = -\frac{\gamma B dB}{\alpha - \gamma B^2} \text{ qui s'intègre en } \ln \frac{T_f}{T_i} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha - \gamma B_f^2}{\alpha - \gamma B_i^2} \right| \text{ ou } T_f = T_i \sqrt{\frac{\gamma B_f^2 - \alpha}{\gamma B_i^2 - \alpha}}$$

$$\text{de l'énoncé s'appliquent, } T_f = T_i \frac{B_f}{B_i} = 35 \text{ mK}$$