

Épreuve de Physique 1

Filière MP

Durée de l'épreuve : 4 heures

Solution proposée

MÉCANIQUE

A. Freinage d'un lingot métallique

I. Mise en équation

I.1 La vitesse du point I_1 en tant que point du solide est $\dot{X} = \dot{x}$; celle du même point du premier cylindre est $\omega_1 \vec{e}_z \wedge r \vec{e}_y = -r\omega_1 \vec{e}_x$; finalement, la condition demandée est $\dot{X} = -r\omega_1$.

I.2 La vitesse de glissement demandée est $\vec{v}_g = \dot{X} \vec{e}_x - (-r\omega_2 \vec{e}_x)$ soit $\vec{v}_g = [\dot{X} + r\omega_2] \vec{e}_x$. D'après les lois de Coulomb, la force $\vec{T}_2$ est de sens opposé au glissement; le signe de T_2 est l'opposé du signe de $\dot{X} + r\omega_2$. Pendant tout le mouvement, $\dot{X} \gg 0$ et $\omega_2 > 0$ donc $T_2 < 0$ (force de freinage); en présence de glissement, on a donc $T_2 = -\mu N_2$.

I.3 Le premier rouleau constitue un solide en rotation autour de son axe de symétrie fixe; on a donc pour moment cinétique de ce solide (en tout point car son barycentre est fixe) $\vec{\sigma}_1 = J\omega_1 \vec{e}_z$. L'énergie cinétique du même rouleau est $E_{c1} = \frac{1}{2} J\omega_1^2$, qu'on peut aussi écrire $E_{c1} = \frac{J}{2r^2} \dot{X}^2$; ajoutée à l'énergie cinétique du solide en translation, on obtient $E_c = \frac{1}{2} [M + \frac{J}{r^2}] \dot{X}^2$ donc $E_c(0) = \frac{1}{2} [M + \frac{J}{r^2}] \dot{X}_0^2 = 293 \text{ J}$.

I.4 Le théorème de la résultante dynamique $m_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$ s'écrit, pour le solide en translation, en projections sur (Ox) $M\ddot{X} = T_1 + T_2$ et sur (Oz) $0 = N_1 + N_2 - Mg$.

I.5 Le théorème du moment cinétique (le terme *moment dynamique* ne fait pas partie du programme de Physique) s'écrit, au barycentre O_1 du cylindre étudié, $\frac{d\vec{\sigma}_1}{dt} = r \vec{e}_y \wedge (-T_1 \vec{e}_x - N_1 \vec{e}_y)$ puisque, d'une part, le poids et les réactions d'axe sont exercées en O_1 et, d'autre part, les actions exercées sur le cylindre sont opposées de celles exercées par le cylindre. Il reste $J \frac{d\omega_1}{dt} = rT_1$.

I.6 Le théorème de König affirme que $\vec{\sigma}_G = \vec{\sigma}^*$, moment cinétique barycentrique du solide S qui, dans son référentiel barycentrique, est entièrement au repos. On a donc $\vec{\sigma}_G = \vec{0}$.

I.7 Le théorème du moment cinétique s'écrit alors, pour S et en son barycentre, $\sum_i \vec{\mathcal{M}}_i = \vec{0}$: la somme des moments des forces de contact est nulle (le moment du poids est nul par construction en G). Il vient donc $\vec{0} = (-h\vec{e}_y + (\ell - X)\vec{e}_x) \wedge (T_2 \vec{e}_x + N_2 \vec{e}_y) + (-h\vec{e}_y - (2d - \ell + X)\vec{e}_x) \wedge (T_1 \vec{e}_x + N_1 \vec{e}_y)$. Après développement, il vient $h(T_1 + T_2) + (\ell - X)(N_1 + N_2) - 2dN_1 = 0$.

I.8 Écrivons successivement $T_1 = -\frac{J}{r^2} \ddot{X}$ d'après (5) et (1) donc $T_2 = (M + \frac{J}{r^2}) \ddot{X}$ (3); on en déduit alors $N_1 = \frac{hM\ddot{X} + (\ell - X)Mg}{2d}$ (6) donc $T_2 = -\mu \left[Mg - \frac{hM\ddot{X} + (\ell - X)Mg}{2d} \right]$ (2) et (4); comparant les deux expressions de T_2 ,

$$(M + \frac{J}{r^2}) \ddot{X} = -\mu \left[Mg - \frac{hM\ddot{X} + (\ell - X)Mg}{2d} \right] \text{ s'écrit aussi } \ddot{X} \left[M \frac{2d - \mu h}{2d} + \frac{J}{r^2} \right] + \frac{\mu Mg}{2d} X = \mu Mg \left[\frac{\ell}{2d} - 1 \right].$$

II. Résolution du problème posé

II.1 Les termes entre crochets de l'énoncé peut aussi s'écrire $\left[1 + \frac{\mu h}{2d - \mu h} \right] = \frac{2d}{2d - \mu h}$. Si on multiplie l'équation du mouvement par ce terme, il vient $\ddot{X} + \Omega^2 X = K$ où on peut trouver la valeur de K en explicitant la valeur

à l'équilibre ($\ddot{X} = 0$) dans l'équation précédente : $\ddot{X} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{\ell - X_{eq}}{2d}$ impose $X_{eq} = \ell - 2d$ donc $K = \Omega^2 X_{eq}$ s'écrit $K = \Omega^2(\ell - 2d)$. Numériquement, $\Omega = 0,622 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

II.2 La solution générale de cette équation est de la forme $X = \alpha \cos(\Omega t) + \beta \sin(\Omega t) + \ell - 2d$; les conditions initiales imposent $0 = X(0) = \alpha + \ell - 2d$ et $\dot{X}_0 = \dot{X}(0) = \beta\Omega$. Finalement, la solution complète de l'équation du mouvement est $X(t) = \frac{\dot{X}_0}{\Omega} \sin(\Omega t) + (\ell - 2d)[1 - \cos(\Omega t)]$.

II.3 On déduit de ce qui précède $\dot{X} = \dot{X}_0 \cos(\Omega t) + \Omega(\ell - 2d) \sin(\Omega t)$ qui s'annule pour $t = \tau$ vérifiant $\tan(\Omega \tau) = \frac{\dot{X}_0}{\Omega(2d - \ell)} = 1,18$. À cet instant, on a donc $\Omega \tau = 0,869 \text{ rad} \simeq \frac{\pi}{4}$, ce qui permet le calcul de $X(\tau)$, exact $X_m = 15,4 \text{ cm}$ ou approché (en prenant $\sin(\Omega \tau) \simeq \cos(\Omega \tau) = 1/\sqrt{2}$), $X_m \simeq 7,8 \text{ cm}$ (remarquons que l'approximation suggérée par l'énoncé est très mauvaise). Dans les deux cas, $X_m < 2(\ell - d) = 40 \text{ cm}$ donc le solide est, à l'instant de l'arrêt, toujours en contact avec le rouleau 1.

II.4 On a vu que $N_2 = -\frac{M + \frac{J}{r^2}}{\mu} \ddot{X}$ donc $N_2(X) = \frac{M + \frac{J}{r^2}}{\mu} \Omega^2 (X - \ell + 2d)$, fonction évidemment croissante de X donc $N_2(X) > 0$ pendant tout le mouvement : pas de décollement en I_2 . On a aussi vu que $N_1 = Mg - N_2$ donc $N_1(X) = Mg - \frac{M + \frac{J}{r^2}}{\mu} \Omega^2 (X - \ell + 2d)$, fonction évidemment décroissante de X . Sa valeur finale est $N_1(X_m) = 1,57 \times 10^4 \text{ N} > 0$ (le calcul avec la valeur approchée de X_m mène à la même conclusion) : il n'y a pas non plus de décollement en I_1 .

II.5 Les poids ne travaillent pas (déplacement horizontal de G , pas de déplacement de O_1), pas plus que les liaisons pivot qui maintiennent l'axe du cylindre 1 (pivot parfait). Les forces intérieures au contact sans glissement en I_1 ne travaillent pas non plus ; finalement, la seule force qui travaille est le contact en I_2 , $P = (T_2 \vec{e}_x + N_2 \vec{e}_y) \cdot \vec{X} \vec{e}_x$ donc $P = -\mu N_2(X) \dot{X}$. Le travail total $W = \int P dt$ peut aussi s'écrire $P = -\mu \int_0^{X_m} N_2(X) dX$; ce travail dissipe toute l'énergie cinétique initiale donc $W = -E_c(0) = -293 \text{ J}$.

II.6 Le rouleau numéro 2 tourne à vitesse constante et son énergie cinétique ne varie pas ; le travail total qu'il reçoit est donc nul. Ce travail comporte W' , fourni par le moteur d'entraînement, et W'' , exercé en I_2 par les forces de contact $-T_2 \vec{e}_x - N_2 \vec{e}_y$. La vitesse du point d'application de cette force étant ici $-r\omega_2 \vec{e}_x$, on aura $W'' = \int_0^\tau T_2(t) r \omega_2 dt < 0$ et $W' + W'' = 0$ donc $W' = \mu r \omega_2 \int_0^\tau \frac{M + \frac{J}{r^2}}{\mu} \Omega^2 \left[\frac{\dot{X}_0}{\Omega} \sin(\Omega t) - (\ell - 2d) \cos(\Omega t) \right] dt$ ou après intégration $W' = (M + \frac{J}{r^2}) r \omega_2 \Omega \left[\frac{\dot{X}_0}{\Omega} [1 - \cos(\Omega \tau)] - (\ell - 2d) \sin(\Omega \tau) \right]$; la définition de τ permet alors une simplification, $\frac{\dot{X}_0}{\Omega} \cos(\Omega \tau) + (\ell - 2d) \sin(\Omega \tau) = 0$ donc enfin $W' = \left(M + \frac{J}{r^2} \right) r \omega_2 \dot{X}_0$. Globalement, le bilan énergétique de l'ensemble impose $E_c(0) + W'' - W_d = 0$ où le travail dissipé en chaleur est donc $W_d = W + W'$.

III. Entraînement hydraulique

III.1 Il s'agit de solides en rotation autour de leur axe de symétrie matérielle donc $\vec{\sigma}_1 = J_1 \omega_1 \vec{e}_z$ et $\vec{\sigma}_2 = J_2 \omega_2 \vec{e}_z$.

III.2 On applique le théorème du moment cinétique (j'insiste encore, il n'y a pas de moment dynamique au programme de Physique, c'est une notion de SII) au solide (1) qui est soumis aux moments (nuls) de son poids et des réactions d'axe, au couple moteur et à $-\vec{C}_1$; on a donc $J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = \Gamma - f_1(\omega_1 - \omega_2)$. De même pour le solide (2), on tient compte de $\vec{C}_1$ et de $\vec{C}_2$ pour écrire $J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = f_1(\omega_1 - \omega_2) - f_2 \omega_2$.

III.3 On peut extraire de la première équation $\omega_2 = \omega_1 + \frac{J_1}{f_1} \frac{d\omega_1}{dt} - \frac{\Gamma}{f_1}$; reportant dans la seconde, il vient

l'équation $J_1 J_2 \frac{d^2 \omega_1}{dt^2} + (J_2 f_1 + J_1 (f_1 + f_2)) \frac{d\omega_1}{dt} + f_1 f_2 \omega_1 = \Gamma (f_1 + f_2)$. Le même procédé en inversant le rôle de ω_1 et ω_2 amène $J_1 J_2 \frac{d^2 \omega_2}{dt^2} + (J_2 f_1 + J_1 (f_1 + f_2)) \frac{d\omega_2}{dt} + f_1 f_2 \omega_2 = \Gamma f_1$.

III.4 Ces deux équations correspondent au même régime libre du second ordre, d'équation caractéristique $J_1 J_2 x^2 + (J_2 f_1 + J_1 (f_1 + f_2))x + f_1 f_2 = 0$, de discriminant $\Delta = (J_2 f_1 - J_1 f_2)^2 + J_1 f_2 [J_1 (f_1 + f_2) + 2J_2 f_2] > 0$; les racines de cette équation sont donc réelles et de même signe car $x_1 x_2 = \frac{f_1 f_2}{J_1 J_2} > 0$; ce signe est négatif car $x_1 + x_2 = -\frac{J_2 f_1 + J_1 (f_1 + f_2)}{J_1 J_2} < 0$. On notera ces deux racines $-1/\tau$ et $-1/\tau'$, ce qui définit les deux constantes de temps du système. Leurs solutions sont donc de la forme $\omega_1(t) = \alpha_1 \exp(-t/\tau) + \alpha'_1 \exp(-t/\tau') + \omega_{1\ell}$ où

$\omega_{1\ell} = \frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2} \Gamma$ et $\omega_2(t) = \alpha_2 \exp(-t/\tau) + \alpha'_2 \exp(-t/\tau') + \omega_{2\ell}$ où $\omega_{2\ell} = \frac{1}{f_2} \Gamma$. Les conditions initiales

en position et en vitesse impose $\alpha + \alpha' + \omega_\ell = 0$ et $\alpha/\tau + \alpha'\tau' = 0$; finalement, $\alpha = -\frac{\tau}{\tau - \tau'} \omega_\ell$ et $\alpha' = \frac{\tau'}{\tau - \tau'} \omega_\ell$

donc $\omega_i(t) = \omega_{i\ell} \left[1 - \frac{\tau \exp(-t/\tau) - \tau' \exp(-t/\tau')}{\tau - \tau'} \right]$ pour $i = 1, 2$. (Pour répondre strictement à cette question,

on n'avait bien sûr pas besoin d'explicitier complètement toutes les constantes).

III.5 Il a été établi ci-dessus que les deux racines de l'équation caractéristiques sont négatives.

III.6 Les valeurs limites de ω_1 et ω_2 ont aussi été établies ci-dessus. La puissance $P_1 = \Gamma \omega_1$ prend alors la valeur $P_1 = \frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2} \Gamma^2$.

III.7 La puissance reçue par le solide 2 de la part de l'extérieur est $-P_2 = \vec{C}_2 \cdot \vec{\Omega}_2$ donc $P_2 = f_1 (\omega_1 - \omega_2) \omega_1$

ou encore $P_2 = \frac{\Gamma^2}{f_2}$.

III.8 $P_1 - P_2 = \frac{\Gamma^2}{f_1} > 0$; une partie de la puissance fournie par le moteur n'est pas transmise car elle est dissipée par frottement fluide au niveau du contact entre les deux solides.

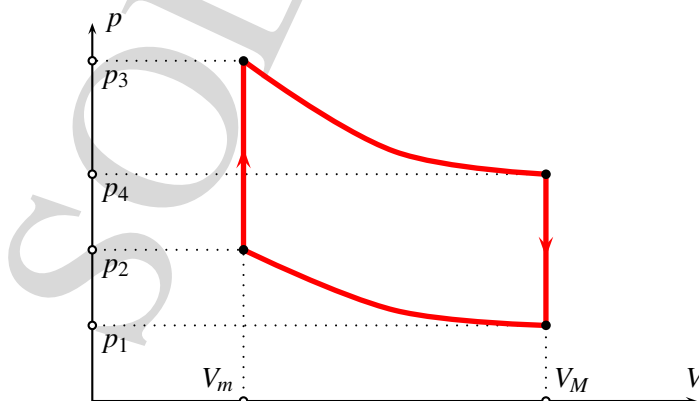
THERMODYNAMIQUE

I. Moteur de Stirling avec un régénérateur parfait

I.1 On a $n = \frac{m}{M} = 5 \text{ mol}$. Le gaz sera considéré comme un gaz parfait donc $p_1 = \frac{nRT_f}{V_M} = 65,1 \text{ bar}$ et

$p_2 = \frac{nRT_f}{V_m} = 130 \text{ bar}$; de même, $p_3 = \frac{nRT_c}{V_m} = 488 \text{ bar}$ et $p_4 = \frac{nRT_c}{V_M} = 244 \text{ bar}$.

I.2 Les isochores sont des verticales, les isothermes des branches d'hyperboles :



I.3 Lors d'une transformation isotherme d'un gaz parfait, $\Delta U_{ab} = 0$ (première loi de Joule) ; par ailleurs,

$$\delta W = -pdV = -nRT \frac{dV}{V} \text{ donc } W_{ab} = -nRT \ln \frac{V_b}{V_a} = -Q_{ab}.$$

I.4 Lors d'une transformation isochore d'un gaz parfait, $\Delta W_{cd} = 0$ (puisque $dV = 0$) donc $Q = \Delta U$ se déduit de la définition même de la capacité thermique, $dU = C_v dT$; avec $\gamma = C_p/C_v$ et $C_p - C_v = nR$ (relation

de Mayer), il vient
$$\Delta U_{cd} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_c - T_d) = Q_{ab}.$$

I.5 On en déduit $W_{1 \rightarrow 2} = -nRT_f \ln \frac{V_m}{V_M} = 9,02 \text{ kJ}$, $W_{2 \rightarrow 3} = 0$, $W_{3 \rightarrow 4} = -nRT_c \ln \frac{V_M}{V_m} = -33,8 \text{ kJ}$ et $W_{4 \rightarrow 1} = 0$.

I.6 De même on obtient facilement $Q_{1 \rightarrow 2} = -W_{1 \rightarrow 2} = -9,02 \text{ kJ}$, $Q_{2 \rightarrow 3} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_c - T_f) = 89,4 \text{ kJ}$, $Q_{3 \rightarrow 4} = -W_{3 \rightarrow 4} = 33,8 \text{ kJ}$ et $Q_{4 \rightarrow 1} = \frac{nR}{\gamma-1} (T_f - T_c) = -89,4 \text{ kJ}$.

I.7 La source chaude est à l'origine des transferts thermiques pendant le chauffage $2 \rightarrow 3$ puis le maintien isotherme $3 \rightarrow 4$ donc $Q_c = Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} = 123 \text{ kJ}$. De même, la source froide est à l'origine du refroidissement $4 \rightarrow 1$ et du maintien isotherme $1 \rightarrow 2$ donc $Q_f = Q_{4 \rightarrow 1} + Q_{1 \rightarrow 2} = -98,4 \text{ kJ}$.

I.8 Le travail total est $W = W_{1 \rightarrow 2} + W_{3 \rightarrow 4} = -24,7 \text{ kJ}$.

I.9 Par définition, l'efficacité (rendement) de ce moteur est $e_{sr} = -\frac{W}{Q_c} = 0,201$.

I.10 On a vu dans le calcul ci-dessus que $Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{4 \rightarrow 1} = 0$.

I.11 La source chaude (externe) n'est plus sollicitée pour le transfert thermique $Q_{2 \rightarrow 3}$ mais seulement pour le transfert thermique $Q_{3 \rightarrow 4}$, ce qui explique le nouveau choix du dénominateur de l'efficacité. Le numérateur est inchangé.

I.12 $e = 0,733$.

I.13 Dans un cycle de Carnot (ditherme réversible), les relations $W + Q_c + Q_f = 0$ et $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$ permettent de retrouver l'efficacité maximale $e_C = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 0,733$: en présence d'un régénérateur parfait, les seuls échanges thermiques avec les sources externes sont les isothermes $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$: ces transformations sont réversibles et le cycle de Stirling devient un cycle de Carnot.

II. Régénérateur non idéal

II.1 a) La question mérite d'être précisée : la concentration molaire volumique $c = \frac{n}{V} = \frac{p}{RT}$ est non uniforme puisque, dans le régénérateur, la pression s'équilibre immédiatement mais pas la température (c'est l'hypothèse habituelle qui distingue la rapidité des équilibres mécaniques et la lenteur des équilibres thermiques) ; on va rechercher quelle serait la valeur de la température T_r qui décrirait un gaz aux propriétés uniformes, sous la même pression et avec la même quantité de matière. Remarquons aussi que, au sens propre, la densité particulière n^* (nombre de molécules par unité de volume) n'est pas égale mais seulement proportionnelle à c , $n^* = \mathcal{N}_A c$ où $\mathcal{N}_A$ est la constante d'Avogadro. On pourrait faire le même raisonnement en nombre de particules et obtenir le même résultat. Notant $S = V_r/L$ la section effectivement ouverte au gaz, la quantité de matière totale est $n_r = \int_0^L c(x) S dx$ qu'on écrit aussi $\frac{n_r}{V_r} = \frac{p}{R} \int_0^L \frac{1}{T(x)} \frac{dx}{L}$. On peut alors remarquer, d'après l'expression proposée par l'énoncé, que $\frac{dx}{L} = \frac{dT}{T_f - T_c}$; il vient donc $\frac{n_r}{V_r} = \frac{p}{R} \frac{1}{T_f - T_c} \int_{T_c}^{T_f} \frac{dT}{T}$ ou $n_r RT_r = p V_r$ avec, en échangeant les signes au numérateur et au dénominateur, $T_r = \frac{T_c - T_f}{\ln \frac{T_c}{T_f}}$.

b) $T_r = 691 \text{ K}$.

c) La quantité de matière totale est la somme des quantités $n_i = \frac{pV_i}{RT_i}$ présentes dans les trois compartiments

donc
$$n = \frac{p}{R} \left(\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_f}{T_f} \right)$$

d) Lors de la compression $1 \rightarrow 2$, la pression p augmente, à T_c et T_f , donc T_r fixés ; ce sont donc les volumes des trois compartiments qui varient. Dans la compression $1 \rightarrow 2$, le volume V_c reste nul mais le volume V_f passe de V_M à V_m (cf. figure 1 de l'énoncé) donc $W = - \int p dV$ s'écrit ici $W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{V_M}^{V_m} \frac{nR}{\frac{V_f}{T_r} + \frac{V_f}{T_f}} dV_f$ qui vaut aussi

$$W_{1 \rightarrow 2} = -nRT_f \left[\ln \left(V_f + \frac{T_f}{T_r} V_r \right) \right]_{V_M}^{V_m} \text{ donc } W_{1 \rightarrow 2} = -nRT_f \ln \frac{V_m + \frac{T_f}{T_r} V_r}{V_M + \frac{T_f}{T_r} V_r} \text{ ou } W_{1 \rightarrow 2} = 8,43 \text{ kJ}.$$

e) Dans la détente $3 \rightarrow 4$, le volume V_f reste nul mais le volume V_c passe de V_m à V_M ; le même calcul que ci-dessus mène donc à $W_{3 \rightarrow 4} = -nRT_c \left[\ln \left(V_c + \frac{T_c}{T_r} V_r \right) \right]_{V_m}^{V_M}$ donc

$$W_{3 \rightarrow 4} = -nRT_c \ln \frac{V_M + \frac{T_c}{T_r} V_r}{V_m + \frac{T_c}{T_r} V_r} \text{ donc } W_{3 \rightarrow 4} = -26,9 \text{ kJ}.$$

f) Le travail total reçu par cycle est $W_{1 \rightarrow 2} + W_{3 \rightarrow 4} = -18,4 \text{ kJ}$; on a donc $|W_{V_r \neq 0}| < |W_{V_r = 0}|$: la compression ne modifie jamais le volume mort donc les volumes accessibles aux variations (dans $\delta W = -pdV$) sont plus faibles et l'aire totale du cycle est moins importante : il était logique que le travail fourni diminue.

g) Puisqu'on fait l'hypothèse d'une absence de toute différence de température entre gaz et sources de chaleur, l'évolution est partout thermiquement réversible. Elle est aussi mécaniquement réversible (isobare) donc il n'y a pas de création d'entropie et l'efficacité est celle d'un cycle de Carnot : $e = e_C = 0,733$.

II.2 a) Le transfert est idéal si le régénérateur permet seulement les transferts thermiques entre les deux compartiments ; toute fuite thermique, vers l'extérieur ou vers le cuivre du régénérateur, rend le transfert non idéal.

b) Par définition, $e = -\frac{W}{Q_c}$ où $Q_c = Q_{2 \rightarrow 3, \text{ext}} + Q_{3 \rightarrow 4}$. Si le système fonctionnait de manière idéale, $Q_{2 \rightarrow 3}$ serait entièrement interne et on retrouverait le rendement de Carnot avec $Q_{2 \rightarrow 3, \text{ext}} = 0$. Par hypothèse, on a défini $Q_{2 \rightarrow 3, \text{ext}} = x Q_{2 \rightarrow 3}$ donc $Q_c = Q_{c, \text{ideal}} + x \frac{nR}{\gamma-1} (T_c - T_f)$ avec $Q_{c, \text{ideal}} = nRT_c \ln \frac{V_M}{V_m}$. On peut donc écrire, au dénominateur de l'efficacité du moteur, $Q_c = Q_{c, \text{ideal}} \left[1 + \frac{x}{\gamma-1} \frac{1}{\ln \frac{V_M}{V_m}} \frac{T_c - T_f}{T_c} \right]$. Ainsi, l'efficacité prend la forme

proposée par l'énoncé avec
$$C_2 = \frac{x}{\gamma-1} \frac{1}{\ln \frac{V_M}{V_m}}.$$

c) On trouve $C_2 = 0,361$ donc $e = 0,580$.

d) Si le cuivre récupère la fraction $x Q_{2 \rightarrow 3}$ de ce transfert thermique, sa température varie de $\Delta T_{\text{Cu}} = \frac{x Q_{2 \rightarrow 3}}{\rho_{\text{Cu}} V_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}}}$ soit $\Delta T_{\text{Cu}} = 39,7 \text{ K}$.

II.3 a) Le vecteur $\vec{j}$ décrivant les courants thermiques vérifie $\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad} T}$; on rappelle que le flux de ce vecteur à travers une surface orientée mesure la puissance thermique qui traverse cette surface dans le sens de son orientation.

b) En régime permanent, le flux thermique est uniforme le long de la barre (absence d'accumulation d'énergie si la température est indépendante du temps) donc $\|\vec{j}\| = \lambda \frac{T_c - T_f}{L}$, dans le sens des températures décroissantes.

Le flux correspondant est $\Phi^c = A \|\vec{j}\|$ donc $\Phi^c = \lambda \pi R_c \frac{T_c - T_f}{2}$ qu'on écrira
$$\Phi^c = \lambda \frac{V^{1/3} \pi^{2/3}}{2^{7/3}} (T_c - T_f).$$

c)
$$R_c = \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{1/3} = 4,57 \text{ cm}, \quad \Phi^c = 22,4 \text{ kW}.$$

d) Le régénérateur ainsi constitué permet l'homogénéisation de température de chaque disque mais assure un gradient thermique longitudinal (le long de l'axe x) permettant l'établissement des transferts thermiques le long de l'axe du régénérateur.

III. Moteur de Stirling solaire

III.1 a) Le flux solaire concentré est reçu par la surface $\frac{\pi}{4} d^2$ avant d'être intégralement transféré sur une

surface $\frac{\pi}{4}D^2$. Ainsi, le flux solaire équivalent sur la face réceptrice est $\phi'_S = \phi_S \frac{d^2}{D^2} = 2,5 \times 10^6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Par ailleurs, le flux surfacique rayonné par l'environnement est $\phi_{\text{amb}} = \sigma T_{\text{amb}}^4 = 544 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ donc il est effectivement négligeable : $\frac{\phi_{\text{amb}}}{\phi'_S} = 2 \times 10^{-4} \ll 1$.

b) En régime permanent, le flux surfacique reçu $\phi'_S + \phi_{\text{amb}} \simeq \phi'_S$ équilibre le flux surfacique rayonné et échangé par convection, $\sigma T^4 + h(T - T_{\text{amb}})$ donc $\phi'_S + \phi_{\text{amb}} \simeq \phi'_S = \sigma T^4 + h(T - T_{\text{amb}})$.

c) $h = \frac{\phi'_S - \sigma T^4}{T - T_{\text{amb}}} = 176 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

III.2 a) On a pour cette surface chaude, d'aire $S = \frac{\pi}{4}D^2$, réception de la puissance $\phi'_S S$, pertes par rayonnement et convection de $S[\sigma T^4 + h(T - T_{\text{amb}})]$, le reste, $P_C = \frac{\pi}{4}D^2 [\phi'_S - \sigma T^4 + h(T - T_{\text{amb}})]$, étant absorbé par la face chaude.

b) Numériquement, $P_C = 70,4 \text{ kW}$.

c) La puissance mécanique produite par le moteur est eP_C ; après conversion, la puissance électrique disponible est donc $P_e = e\eta P_C = 27,4 \text{ kW}$.

III.3 a) Toute la puissance absorbée est entièrement transférée au sodium puisque le changement d'état impose une température constante. La masse vaporisée par seconde $\dot{m}_v$ vérifie donc $P_C = \dot{m}_v \frac{\Delta_{\text{vap}}H}{M_{\text{Na}}}$ puisque $\frac{\Delta_{\text{vap}}H}{M_{\text{Na}}}$ est la chaleur latente massique de vaporisation. On a donc $\dot{m}_v = \frac{P_C M_{\text{Na}}}{\Delta_{\text{vap}}H} = 79,7 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$.

b) Le changement d'état permet de transporter le flux thermique incident sous forme de chaleur latente; en repassant à l'état liquide, le sodium libère, au niveau de la source chaude du moteur de Stirling, exactement la même quantité d'énergie que celle qu'il a absorbé lors de la vaporisation.

c) Le passage par un caloduc permet l'uniformisation de la température sur la source chaude du moteur Stirling, indépendamment des fluctuations du rayonnement solaire incident.

Extrait du rapport technique E-8101 de la NASA : *Stirling heat engines are being developed for electrical power generation use on manned and unmanned earth orbital and planetary missions. Dish Stirling solar systems and nuclear reactor Stirling systems are two of the most promising applications of the Stirling engine electrical power generation technology. The sources of thermal energy used to drive the Stirling engine typically are non-uniform in temperature and heat flux. Liquid metal heat pipe receivers are used as thermal transformers and isothermalizers to deliver the thermal energy at a uniform high temperature to the heat input section of the Stirling engine. The use of a heat pipe receiver greatly enhances system efficiency and potential life span.*