CCP - MP - Physique 2 - 2012
Solution proposée

I.1. Calculons ${E_1T_2}^2$:

$$\begin{aligned} {E_1T_2}^2 &= \left(\overrightarrow{E_1\Omega} + \overrightarrow{\Omega T} + \overrightarrow{TT_2}\right)^2 \\ &= {x_1}^2 + D^2 + \frac{b^2}{4} + x_1 b\cos\alpha + Db\sin\alpha \\ &= D^2\left(1 + \frac{b}{D}\sin\alpha + \frac{x_1 b}{D^2}\cos\alpha + \frac{b^2}{4D^2} + \frac{{x_1}^2}{D^2}\right) \end{aligned}$$

Le premier terme est d'ordre zéro, le deuxième d'ordre 1 et les trois derniers d'ordre 2, puisque $|x_1| \ll D$ et $b \ll D$. Effectuons alors un d.l. à l'ordre 2 de E_1T_2 :

$$E_1T_2 = D\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{D}\sin\alpha + \frac{x_1 b}{D^2}\cos\alpha + \frac{b^2}{4D^2} + \frac{{x_1}^2}{D^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{b}{D}\sin\alpha\right)^2\right]$$

De même $$E_1T_1 = D\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{-b}{D}\sin\alpha - \frac{x_1 b}{D^2}\cos\alpha + \frac{b^2}{4D^2} + \frac{{x_1}^2}{D^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{b}{D}\sin\alpha\right)^2\right]$$

Ainsi $$\boxed{\delta_1 = b\sin\alpha + \frac{x_1\, b\cos\alpha}{D}}$$

De même $$\boxed{\delta_2 = b\sin\alpha + \frac{x_2\, b\cos\alpha}{D}}$$

Donc $$\boxed{\phi_k = \frac{2\pi}{\lambda}\delta_k = \frac{2\pi}{\lambda}\left(b\sin\alpha + \frac{x_2 X}{D} - L_\mathrm{f}\right)} \qquad \text{avec } X = b\cos\alpha$$

en incluant le retard L_f sur le signal issu de T_1.

I.2. Les deux étoiles étant incohérentes entre elles, on peut sommer leurs intensités respectives :

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= I_0(2 + \cos\phi_1 + \cos\phi_2) \\ &= 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Du fait que $x_2 = -x_1$, on obtient :

$$\boxed{I = 2I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(b\sin\alpha - L_\mathrm{f})\right)\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}b\cos\alpha\frac{x_2 - x_1}{D}\right)\right]}$$

I.3. L'éclairement est uniforme et égal à $2I_0$ si $\cos\left(\frac{\pi}{\lambda}b\cos(\alpha)\theta\right)$ est nul, ceci est réalisé pour

$$\theta = \frac{\lambda}{2b\cos\alpha} + m\pi \qquad m \in \mathbb{Z}$$

La plus petite valeur absolue de θ annulant le contraste est donc

$$\boxed{\theta_{\min} = \frac{\lambda}{2b\cos\alpha} = 8\times10^{-9}\ \text{rad}}$$

I.4. b étant fixé de fait, θ étant la variable (du fait du déplacement des deux étoiles au cours du temps), on en déduit

$$I_{\max} = 2I_0\left[1+\left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(b\sin\alpha - L_{\rm f})\right)\right|\right] \qquad \text{et} \qquad I_{\min} = 2I_0\left[1-\left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(b\sin\alpha - L_{\rm f})\right)\right|\right]$$

Ainsi
$$\boxed{\gamma = \left|\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(b\sin\alpha - L_{\rm f})\right)\right|}$$

I.5. Ceci a pour effet de maximiser le contraste le rendant égal à 1.

I.6.1. En combinant les différentes formules proposées, on obtient littéralement :
$$D_{\rm g} = -\frac{1{,}984}{8\pi^2 c}\frac{N_2\lambda_0}{{n_2}^2 a^2}$$
Or $1{,}984/(8\pi^2 c) = 83{,}76$ ps.m^{-1} $= 83{,}76\times10^3$ ps.km^{-1}. Ainsi,
$$\boxed{D_{\rm g} = -83{,}76\times10^3\frac{N_2\lambda_0}{{n_2}^2 a^2}\ (\text{ps.km}^{-1}.\mu\text{m}^{-1}) = -83{,}76\frac{N_2\lambda_0}{{n_2}^2 a^2}\ (\text{ps.km}^{-1}.\text{nm}^{-1})}$$
(Force est de reconnaître que j'ai dû « deviner » en quelle unité était donnée la première formule donnant $D_{\rm g}$, le préfacteur 1,984 dépendant du choix de l'unité pour λ_0 que j'ai considéré être le micromètre...)

I.6.2. En imposant $D_{\rm g} + D_{\rm m} = 0$, on obtient
$$\boxed{a = \sqrt{\frac{83{,}76N_2\lambda_0}{{n_2}^2 A\ln\left(\frac{\lambda_0}{B}\right)}} = 2{,}13\ \mu\text{m}}$$

I.6.3.
$$\boxed{V = 1{,}04 < 2{,}4}$$
La fibre est bien monomode.

II.1.1. Descartes en I et I' :
$$\boxed{\sin i = n\sin r \qquad \text{et} \qquad \sin i' = n\sin r'}$$
et
$$\boxed{A = r + r' \qquad \text{et} \qquad D = i + i' - A}$$

II.1.2.1. La face d'entrée du prisme étant perpendiculaire à l'axe optique et le rayon émergeant étant parallèle à l'axe optique, on a nécessairement
$$\boxed{D_k = i_k}$$

II.1.2.2. Calculons
$$\begin{aligned}
\sin A_k &= n\sin r'_k \\
&= n\sin(A_k - r_k) \\
&= n\left(\sin A_k\cos r_k - \sin r_k\cos A_k\right) \\
&= n\left(\sin A_k\left(1-\sin^2 r_k\right) - \sin r_k\cos A_k\right) \\
&= n\left(\sin A_k\sqrt{1-\frac{\sin^2 i_k}{n^2}} - \frac{\sin i_k}{n}\cos A_k\right)
\end{aligned}$$
Simplifions par $\sin A_k$ (A_k étant clairement non nul, le prisme serait d'épaisseur nulle et la déviation nulle) :
$$1 = \sqrt{n^2 - \sin^2 i_k} - \frac{\sin i_k}{\tan A_k}$$
Finalement
$$\boxed{\tan A_k = \frac{\sin i_k}{\sqrt{n^2-\sin^2 i_k} - 1}}$$

L'exposant β vaut donc 1/2.

II.1.2.3.
$$\boxed{\sin i_k = \frac{\rho_k}{\sqrt{{\rho_k}^2 + {f_0}^2}}}$$

II.1.3.
$$\boxed{\varepsilon = \frac{\phi - \phi_0}{2N} = 5 \text{ mm}}$$

On en déduit les valeurs numériques suivantes :

$$\boxed{i_1 = 17° \quad \text{et} \quad A_1 = 31° \quad \text{et} \quad i_{10} = 37° \quad \text{et} \quad A_{10} = 58°}$$

II.1.4. Pour une lentille plan-convexe $|\overline{R_1}| = +\infty$, on en déduit

$$\boxed{R_{\text{pc}} = |\overline{R_2}| = (n-1)f_i = 5 \text{ cm}}$$

II.1.5
$$CO = \frac{\phi_{\text{cc}}}{2\tan(\alpha_{\text{cc}})}$$

donc
$$\boxed{e_{\text{cc}} = 2(R_{\text{cc}} - CO) = 2R_{\text{cc}} - \frac{\phi_{\text{cc}}}{\tan(\alpha_{\text{cc}})}}$$

Avec un peu de trigonométrie, on déduit que

$$\tan\alpha_{\text{cc}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4{R_{\text{cc}}}^2}{{\phi_0}^2} - 1}}$$

On en déduit pour la lentille plan-convexe (d'épaisseur moitée de la bi-convexe, tous paramètres égaux par ailleurs) :

$$\boxed{e_{\text{pc}} = R_{\text{pc}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{{\phi_0}^2}{4{R_{\text{pc}}}^2}}\right) = 0{,}67 \text{ cm}}$$

II.1.6 Calculons d'abord le rayon R_{cc} d'une lentille biconvexe. Avec la formule rappelée précedemment avec $\overline{R_1} = -\overline{R_2}$ et $R_1 = R_2 = R_{\text{cc}}$, on a

$$R_{\text{cc}} = 2(n-1)f_i = 10 \text{ cm}$$

On en déduit que

$$\boxed{e_{\text{cc}} = 2R_{\text{cc}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{{\phi'_0}^2}{4{R_{\text{cc}}}^2}}\right) = 6{,}8 \text{ cm}}$$

avec ϕ'_0 le diamètre de cette lenitlle. L'encombrement (et donc le poids) de la lentille est donc bien moindre dans la configuration dite de Fresnel.

II.2.1. Le chemin (D) est plus long que le chemin (G), la vitesse relative de la lumière $v_{\text{D}} = \frac{c}{n} - R_{\text{S}}\Omega$ étant plus faible que $v_{\text{G}} = \frac{c}{n} + R_{\text{S}}\Omega$. (Attention, comme demandé dans l'énoncé, on calcule les vitesses avec la loi de composition des vitesse classique.)
On observe ainsi une teinte plate dont l'éclairement dépend du déphasage entre les deux chemins et donc de Ω, ce qui en permet donc la mesure.

II.2.2.
$$\boxed{t_{\text{D}} = \frac{2\pi R_{\text{S}}}{c/n - R_{\text{S}}\Omega} \quad \text{et} \quad t_{\text{G}} = \frac{2\pi R_{\text{S}}}{c/n + R_{\text{S}}\Omega}}$$

$$\Delta\phi = \omega(t_D - t_G) = \frac{2\pi c}{\lambda_0}\frac{2\pi R_S n}{c}\left(\frac{1}{1 - R_S\Omega/c} - \frac{1}{1 + R_S\Omega/c}\right)$$

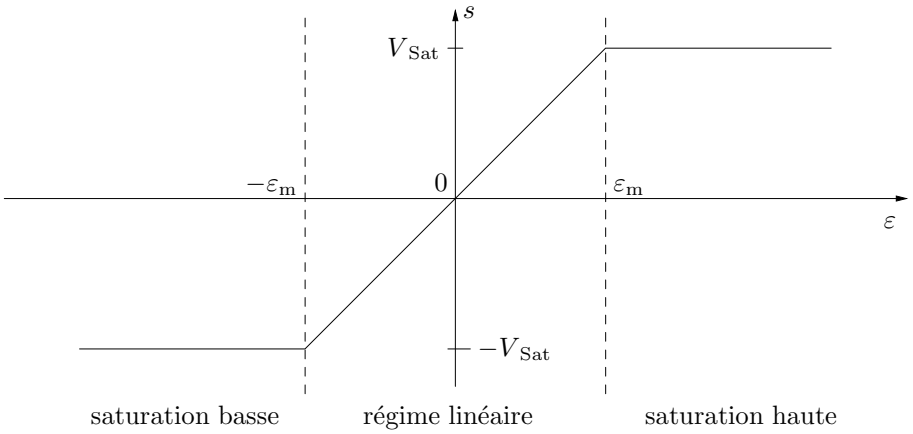
Au premier ordre en $R_S\Omega/c$, on obtient

$$\boxed{\Delta\phi = \frac{8\pi^2 {R_S}^2 \Omega n}{\lambda_0 c}}$$

avec λ_0, la longueur d'onde dans le vide. De là, on déduit la différence de marche :

$$\boxed{\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi}\Delta\phi = \frac{4\pi {R_S}^2 n}{c}}$$

III.1.1. La caractéristique est la suivante, avec $\varepsilon_m = V_{Sat}/\mu$:



III.1.2. $\boxed{i_- = i_+ = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad \mu = +\infty}$

Le triangle représente l'ancien symbole de l'AO (enfin, je crois...). Le signe ∞ représente le gain infini de l'AO idéal.

III.2.1. $\boxed{K_1 = 1 \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{et} \quad K_3 = \frac{R_4}{R_3} \quad \text{et} \quad K_4 = \left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right)}$

II.2.2. $\boxed{\text{3 : amplificateur soustracteur ; 4 : amplificateur non inverseur}}$

III.3.1. L'impédance d'entré d'un montage suiveur étant infinie, la tension U_c n'est pas modifiée par la chaîne de mise en forme du signal.

III.3.2. Le rôle du montage décaleur est d'éliminer la tension résiduelle $0{,}25V_{cc}$ présente à champ nul, de manière à obtenir un signal de sortie proportionnel au champ.

III.3.3.

$$U_1 = 0{,}25V_{cc} + 20B$$

$$U_2 = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}V_{cc}$$

$$U_3 = \frac{R_4}{R_3}\left[\left(0{,}25 - \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}\right)V_{cc} + 20B\right]$$

$$\boxed{U_4 = \left(1 + \frac{R_6}{R_5}\right)\frac{R_4}{R_3}\left[\left(0{,}25 - \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}\right)V_{cc} + 20B\right]}$$

III.3.3. $\boxed{U_\mathrm{S} = KB}$ avec $K = 100$ V.T^{-1}

IV.1.1.1. La surface dS étant localement assimilable à un plan chargé uniformément, ce dernier est plan de symétrie pour la distribution de charges localisées sur celui-ci : le champ créé par dS est donc symétrique par rapport à ce dernier. De plus, tout plan orthogonal à dS contenant M_0 est également plan de symétrie pour cette distribution, ainsi $\overrightarrow{E_\mathrm{i}}(M_1)$ et $\overrightarrow{E_\mathrm{i}}(M_2)$ sont colinéaires à $\overrightarrow{n}$. On en déduit que

$$\boxed{\overrightarrow{E_\mathrm{i}}(M_2) = -\overrightarrow{E_\mathrm{i}}(M_2)}$$

Le champ $\overrightarrow{E_\mathrm{e}}$ est créé par l'ensemble des charges exceptées celles placées sur dS, il est donc continu en M :

$$\boxed{\overrightarrow{E_\mathrm{e}}(M_2) = \overrightarrow{E_\mathrm{e}}(M_1) = \overrightarrow{E_\mathrm{e}}(M_0)}$$

IV.1.1.2. Le conducteur C étant en équilibre, le champ à l'intérieur de ce dernier est nul :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M_1) = \overrightarrow{0}}$$

Ainsi $$\boxed{\overrightarrow{E_\mathrm{e}}(M_1) + \overrightarrow{E_\mathrm{i}}(M_1) = \overrightarrow{E}(M_1) = \overrightarrow{0}}$$

Th. de Coulomb $$\boxed{\overrightarrow{E}(M_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}}$$ avec $\sigma = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$

Ainsi $$\boxed{\overrightarrow{E_\mathrm{e}}(M_2) + \overrightarrow{E_\mathrm{i}}(M_2) = \overrightarrow{E}(M_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}}$$

IV.1.1.3. $$\overrightarrow{E_\mathrm{i}}(M_2) = -\overrightarrow{E_\mathrm{i}}(M_1) = \overrightarrow{E_\mathrm{e}}(M_1) = \overrightarrow{E_\mathrm{e}}(M_0)$$

donc $$\overrightarrow{E_\mathrm{e}}(M_0) + \overrightarrow{E_\mathrm{e}}(M_0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\overrightarrow{n}$$

Finalement $$\boxed{\overrightarrow{E_\mathrm{e}}(M_0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{n}}$$

En revanche, $\overrightarrow{E}$ n'est pas défini en M_0 puisque M_0 appartient à la distribution surfacique le générant. (Je ne sais pas si c'est une erreur d'énoncé ou un piège volontaire...)

IV.1.1.4. La force subie par la charge dq est exercée par l'ensemble des autres charges et donc par $\overrightarrow{E_\mathrm{e}}(M_0)$ et non par $\overrightarrow{E}(M_0)$ (comme le suggère l'énoncé). On en déduit que

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}f} = \mathrm{d}q\overrightarrow{E_\mathrm{e}}(M_0) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}S\overrightarrow{n}} \qquad k = \frac{1}{2\varepsilon_0}$$

IV.1.2.1 Le problème étant à symétrie sphérique, en appliquant le théorème de Gauss, puis en calculant le potentiel électrostatique et en prenant comme convention de l'annuler à l'infini, on trouve que

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

(Je ne vois pas comment faire cela plus vite, à moins que cela soit un résultat de cours à connaître par cœur, d'autant que le calcul complet est demandé à la question IV.2.1.)

Ainsi $$\boxed{\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{\varepsilon_0 V}{R}}$$

la répartition de charges étant uniforme, de par la symétrie sphérique du problème.

IV.1.2.2. (Δ) est axe de symétrie pour la distribution de charges. Soient deux surface élémentaires identiques $\mathrm{d}S$ centrées sur deux points P et P' de la calotte sphérique symétriquement opposés par rapport à Δ, les champs $\overrightarrow{E_\mathrm{e}}(P)$ et $\overrightarrow{E_\mathrm{e}}(P')$ sont symétriques. Ainsi la résultante des forces électrostatiques exercées sur P et P' :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}f}(P) + \overrightarrow{\mathrm{d}f}(P') = \sigma \mathrm{d}S(\overrightarrow{E_\mathrm{e}}(P) + \overrightarrow{E_\mathrm{e}}(P'))$$

est portée par l'axe Δ. Pour tout point P de la calotte, il existe un point P' comme défini précédemment. On en déduit donc que

La résultante des forces agissant sur la calotte est portée par l'axe (Δ).

IV.1.2.3.

$$\boxed{\mathrm{d}f_1 = \cos\theta\,\mathrm{d}f \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\Sigma = \cos\theta\,\mathrm{d}S}$$

IV.1.2.4. Calculons, en notant S la surface de la calotte sphérique et $\overrightarrow{u_z}$ un vecteur unitaire colinéaire et de même sens que (Δ) :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{f} &= \iint_{P\in S} \overrightarrow{\mathrm{d}f}(P) \\
&= \iint_{P\in S} \mathrm{d}f_1 \overrightarrow{u_z} \\
&= \iint_{P\in S} \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\cos\theta \mathrm{d}S\overrightarrow{u_z} \\
&= \iint_{P\in S} \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}\Sigma\overrightarrow{u_z} \\
&= \left(\iint_{P\in S} \mathrm{d}\Sigma\right)\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z} \\
&= \pi\left(R\sin\alpha\right)^2\frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\overrightarrow{f} = \frac{\pi}{2}\varepsilon_0 V^2\sin^2\alpha\,\overrightarrow{u_z}}$ car $\sigma = \varepsilon_0 V/R$

IV.1.3. Le disque étant conducteur et en contact avec toute la surface de la sphère conductrice, il porte donc la même charge surfacique que la sphère σ. On en déduit que la force subie par le disque a l'expression suivante :

$$\overrightarrow{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\pi a^2\overrightarrow{u_z} = \frac{\pi\varepsilon_0}{2}\frac{a^2}{R^2}V^2\overrightarrow{u_z}$$

L'expression démontrée à la question IV.1.1.4. est valable dans ce cas car $a \ll R$ (« petit disque »).
Cette force doit compenser le poids du disque $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$, on en déduit que pour que le disque se soulève, il faut appliquer un potentiel supérieur à

$$\boxed{V_{\min} = \frac{R}{a}\sqrt{\frac{2mg}{\pi\varepsilon_0}}}$$

IV.2.1.1. La répartition de charges étant uniforme, on a

$$\boxed{Q = 4\pi R^2\sigma}$$

IV.2.1.2. Le problème étant à symétrique sphérique, le champ électrique ne dépend que de la variable r. Tout plan contenant la droite (CM) est plan de symétrie pour la distribution de charges. Le champ électrique en M est donc porté par la droite (CM), on en déduit la forme du champ suivante

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = E(r)\overrightarrow{u_r}}$$

IV.2.1.3. Soit Σ une sphère de rayon r centrée en C. On oriente cette dernière vers l'extérieur. Le flux du champ électrique à travers Σ vaut donc

$$\phi_\Sigma(\overrightarrow{E}) = \oiint_\Sigma \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 4\pi r^2 E(r)$$

La charge intérieure à Σ est donnée par

$$Q_{\text{int}}(\Sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ Q & \text{si } r > R \end{cases}$$

Par application du théorème de Gauss pour une surface fermée et orientée vers l'extérieur ($\phi_\Sigma(\overrightarrow{E}) = Q_{\text{int}}(\Sigma)/\varepsilon_0$), on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \begin{cases} \overrightarrow{0} & \text{si } r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{u_r} & \text{si } r > R \end{cases}}$$

IV.2.1.4. D'après la relation $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, et par symétrie sphérique du problème, V ne dépend que de r et

$$V'(r) = -E(r)$$

On intègre en assurant la continuité du potentiel et la nullité de ce dernier à l'infini pour obtenir :

$$\boxed{V(M) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & \text{si } r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{si } r > R \end{cases}}$$

IV.2.2.1. La surface de la spire élementaire vaut

$$\mathrm{d}s = R\sin\theta \times R\mathrm{d}\theta = R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

La charge portée par cette dernière vaut donc

$$\mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}s = \sigma R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

Chaque charge effectue un tour complet en $T = 2\pi/\omega$. Le courant résultant dans la spire a donc l'expression suivante :

$$\boxed{\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}q}{T} = \frac{\omega\sigma R}{2\pi} R\sin\theta\mathrm{d}\theta} \qquad \text{soit } j_0 = \frac{\omega\sigma R}{2\pi}$$

IV.2.2.2. D'après la formule rappelée par l'énoncé (avec $a = R\sin\theta$), on obtient

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}B}(C) = \frac{\mu_0 j_0 R\sin\theta\mathrm{d}\theta}{2R\sin\theta}\sin^3\theta\overrightarrow{u_z} = \frac{\mu_0 j_0}{2}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_z}}$$

Le champ total se calcule en intégrant cette dernière expression pour θ variant de 0 à π. Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{B}(C) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 j_0}{2}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_z} = \frac{2}{3}\mu_0 j_0\overrightarrow{u_z}}$$

IV.2.2.3. D'après la définition d'un moment magnétique pour une spire plane, on a

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}\mathcal{M}} = \pi(R\sin\theta)^2\mathrm{d}I\overrightarrow{u_z} = \pi j_0 R^3\sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_z}}$$

Par intégration, on obtient $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}} = \frac{4}{3}\pi R^3 j_0\overrightarrow{u_z}}$

IV.2.3.1. Le champ intérieur devant être nul, il faut que $\overrightarrow{B}(C) = -\overrightarrow{B_0}$. On en déduit la valeur de j_0 :

$$\boxed{j_0 = -\frac{3}{2}\frac{B_0}{\mu_0}}$$

et donc $$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}} = -2\pi R^3 \frac{B_0}{\mu_0}\overrightarrow{u_z}}$$

IV.2.3.2. Soit un élément de surface $\mathrm{d}S$ centré sur un point P de la surface de la sphère, la force de Laplace subit par cet élément de surface vaut

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F} = (\overrightarrow{j_\mathrm{S}} \wedge \overrightarrow{B_0})\mathrm{d}S = j_0 B_0 \sin\theta \mathrm{d}S\overrightarrow{u_r}$$

Le champ de force présente donc un symétrie axiale d'axe (Cz), par intégration sur la sphère, la résultante est clairement nulle.

IV.2.3.3. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E_\mathrm{p} &= -\overrightarrow{B_0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\mathcal{M}} \\
&= \frac{2\pi R^3}{\mu_0}\overrightarrow{B_0} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}B_0} \\
&= \frac{2\pi R^3}{\mu_0}\mathrm{d}\left(\frac{{B_0}^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Par intégration $$\boxed{E_\mathrm{p} = \frac{\pi}{\mu_0} R^3 {B_0}^2}$$

à une constante additive près.

IV.2.3.4. D'après la formule précédente, l'énergie potentielle est plus faible dans les régions de champ plus faible, d'où la migration de la sphère vers les régions de plus faible champ.