Corrigé de l'épreuve de Centrale MP 2020

L'énergie électrique d'origine nucléaire

I L'Uranium, source d'énergie

I.A L'uranium naturel

I.A.1 Evolution de la population d'Uranium au cours du temps

1. λ est l'inverse d'un temps.
2. $N(t+\mathrm{d}t) = N(t) - N(t)\lambda \mathrm{d}t$ (le dernier terme correspondant aux noyaux s'étant désintégrés pendant $\mathrm{d}t$. On a donc $N(t+dt) - N(t) = \lambda \mathrm{d}t$, d'où l'équation demandée.
3. On résout : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, d'où $N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$, et donc $\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}$.
4. $\boxed{\lambda_{238} = 4,9151.10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1}\ ;\ \lambda_{235} = 3,121.10^{-17}\ \mathrm{s}^{-1}}$.
   On est sur un ordre de grandeur similaire au Thorium, ce qui n'est guère surprenant car ce dernier a des propriétés radioactives similaires.
5. Elle diminue : la quantité d'Uranium 235 diminue plus rapidement que celle d'Uranium 238.
6. Si on note x_0 la proportion d'Uranium 235 présente à $t = 0$ (instant présent), la quantité des deux isotopes d'Uranium s'écrit :
   $N_{235} = x_0 N_0 e^{-\lambda_{235} t}$ et $N_{238} = (1 - x_0) N_0 e^{-\lambda_{238} t}$.
   La proportion $x(t)$ d'Uranium 235 s'écrit donc :
   $x(t) = \frac{N_{235}}{N_{235}+N_{238}} = \frac{1}{1+N_{238}/N_{235}}$, soit :

$$x(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-x_0}{x_0} \exp\left((\lambda_{235} - \lambda_{238})t\right)}$$

   On peut donc en extraire le temps (négatif) où $x(t) = 0,03$:
   $\frac{1-x(t)}{x(t)} = \frac{1-x_0}{x_0} \exp\left((\lambda_{235} - \lambda_{238})t\right)$, et donc :
   $t = \frac{1}{\lambda_{235}-\lambda_{238}} \ln \frac{(1-x(t))x_0}{(1-x_0)x(t)} = -1,963.10^9$ ans
   L'age de la Terre étant de l'ordre de 4,5 milliards d'années, on a donc une durée de 2,5 milliards d'années pendant laquelle l'Uranium était assez riche pour faire fonctionner un réacteur nucléaire.
   Note : on a d'ailleurs observé les traces de réactions auto-entretenues naturelles à Oklo. Celui-ci aurait fonctionné il y a 2 milliards d'années, justement...

I.A.2 Radioactivité naturelle au XXI$^{\mathrm{e}}$siècle

7. Commencons par déterminer la puissance P dégagée par la radioactivité d'une masse m d'Uranium naturel.
   On dispose pour cela des énergies E_{235} et E_{238} libérées par la désintégration de l'Uranium, des masses molaires, et des fractions molaires x_{235} et x_{238}.
   On note $M = x_{235}M_{235} + x_{238}M_{238}$ (on néglige l'isotope 234...) la masse molaire globale de l'Uranium.
   Les quantités n_i de chaque isotope valent donc :
   $n_i = x_i \frac{m}{M}$.

Le nombre de désintégrations de chaque isotope par unité de temps vaut :
$D_i = \lambda_i \mathcal{N}_A n_i$,
et la puissance dégagére par chaque isotope vaut :
$P_i = E_i D_i$.
En additionnant les puissances dues à chaque isotope, on obtient :

$$\boxed{P = \frac{m\mathcal{N}_A}{x_{235}M_{235} + x_{238}M_{238}} \left(x_{235}\lambda_{235}E_{235} + x_{238}\lambda_{238}E_{238}\right)}$$

Soit $P = 0,212$ mW pour $m = 24$ kg et $P = 8,82$ mW pour $m = 1$ t.
La valeur obtenue est nettement plus faible que celle donnée par le texte. L'écart est due au fait que la valeur donnée par le texte prend en compte l'intégralité de la chaîne de désintégration, qui comprend de nombreuses étapes...

I.B Le combustible nucléaire

I.B.1 Cristal de dioxyde d'Uranium

8. Les Uranium sont en gris clair (ils correspondent bien à un réseau CFC) et les Oxygène en gris foncé (ils correspondent à un réseau cubique). Les Oxygène occupent les sites tétraédriques du réseau CFC (on peut d'ailleurs noter un des tétraèdres dessiné sur la figure...)
9. On a 4 atomes d'Uranium et 8 atomes d'Oxygène par maille, ce qui est bien cohérent avec la formule.
10. La masse volumique s'exprime $\rho = \frac{8M_O + 4M_U}{\mathcal{N}_A a^3}$, la masse molaire de l'Uranium valant toujours $M_U = x_{235}M_{235} + x_{238}M_{238}$. On a donc :

$$a = \left(\frac{8M_O + 4M_U}{\mathcal{N}_A \rho}\right)^{1/3} = 546 \text{ pm}$$

Il est vraisemblable que le commentaire de la question consiste à déterminer la distance entre les centres des deux atomes. Si c'est bien le cas, cette distance vaut : $d = \frac{\sqrt{3}}{4}a = 237$ pm (il s'agit d'un quart de la grande diagonale du cube), ce qui correspond exactement à la somme des rayons ioniques.

I.B.2 Combustible utilisé dans les centrales

11. On peut calculer explicitement l'énergie libérée par la désintégration de l'Uranium 235 *seul* :
$E = E_{235}\mathcal{N}_A \frac{m}{M} = 14,2$ MJ.
Si on prend en compte toute la chaîne de désintégration, l'énergie totale sera environ 10 fois plus grande d'après la comparaison réalisée à la question 7.
12. La centrale à charbon comme la centrale nucléaire sont des centrales thermiques, pour lesquelles le rendement est de l'ordre de 33 %. Il faut donc avoir une énergie primaire de l'ordre de $E = 60.000$ kWh $= 2.10^{11}$ J.
Pour l'Uranium, l'énergie libérée est donnée par la même relation qu'à la question précédente, avec cette fois $E_{235} = 200$ MeV.
On aurait donc $m = \frac{ME}{\mathcal{N}_A E_{235}} = 2,5$ g

Pour le charbon, la seule information disponible est la tonne équivalent charbon. Il s'agit (l'énoncé ne le précise pas !) de l'énergie thermique libérée par la combustion d'une tonne de charbon. On trouve alors qu'il faut environ 7t de charbon pour alimenter la maison.

On a donc un facteur supérieur à 10^6 dans les masses nécessaires : l'Uranium est donc une source d'énergie bien plus compacte que le charbon ; cela rend par ailleurs le stockage de réserves stratégiques bien plus aisé dans le cas de l'Uranium.

II Le coeur du réacteur

II.A Quelques analyses préliminaires

13. L'intérêt de produire le combustible sous forme de pastilles au lieu de cylindres est sans doute la facilité de transport et de manipulation. L'intérêt de faire une multitude de petits crayons de combustible est d'augmenter la surface d'échange avec l'eau du circuit primaire, pour faciliter les transferts de chaleur et limiter la température atteinte par les cylindres.
14. Les 24 emplacements restants sont utilisés pour contrôler la réaction grâce à des matériaux absorbeurs de neutrons, indispensables pour éviter la divergence.
15. La surface d'échange d'un crayon de hauteur $H = 4$ m et de diamètre $D = 9,5$ mm vaut $S_c = \pi DH$. On a $N = 241 \times 265$ crayons de combustible, donc une surface totale
$S = NS_c = 7,6.10^3$ m^2. On retrouve l'ordre de grandeur indiqué dans les données.

II.B Approche théorique

II.B.1 Modélisation

16. Le crayon peut être assimilé à un crayon infini étant donné que $H \gg R$. On a alors invariance par rotation autour de (Oz) et par translation selon $\overrightarrow{u_z}$, d'où une dépendance en la seule variable r. Comme $\overrightarrow{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$, on $\overrightarrow{j} = -\frac{\text{d}T}{\text{d}r}\overrightarrow{u_r}$.
17. $\overrightarrow{j}$ ne peut pas présenter de discontinuité car la source d'énergie est volumique, donc $\frac{\text{d}T}{\text{d}r}$ non plus : cela exclut les deux premiers profils ; par ailleurs $\overrightarrow{j}$ est dirigé vers l'extérieur du crayon, et des températures les plus hautes vers les plus basses. La température est donc maximale au centre du crayon : on a donc le profil 4.
18. On a $\overrightarrow{j} = 2\lambda K r \overrightarrow{u_r}$. On a la densité de courant thermique en périphérie d'un crayon, on peut donc écrire :
$\boxed{K = \frac{j(R)}{2\lambda R} = 3,31.10^7 \text{ K.m}^{-2}}$.
19. La puissance libérée dans un crayon vaut $P = j(R).\pi DH$, son volume vaut $V = \pi \frac{D^2}{4} H$.
On a donc une puissance volumique $\boxed{P_v = \frac{4j(R)}{D} = 6,61.10^8 \text{ W.m}^{-3}}$.
(Note : Je n'ai pas tenu compte de la gaine vu l'indication de modélisation du début de la partie, mais on pourrait interpréter cette question comme se référant au seul combustible, avec donc un volume plus petit...)
20. La puissance linéique pourrait être la puissance générée par unité de longueur de crayon. Cette puissance vaut $P = j(R).\pi D = 4,69.10^4$ W.m^{-2} en exploitant l'expression de la question précédente. On retrouve bien la valeur donnée aux arrondis près. La puissance linéique est étroitement reliée à la température au coeur du crayon (via K) ; une puissance linéique trop importante conduirait à un risque de fusion du coeur du crayon.

21. On a $\boxed{T(0) = T(R) + KR^2 = 929\ °\text{C}}$. La température obtenue est inférieure à la température de fusion, ce qui est plutôt rassurant.

22. La température n'est pas exactement la même en raison de la présence d'une couche limite d'eau le long du cylindre, dans laquelle la température varie assez rapidement. Cela se modélise par la loi de Newton $\overrightarrow{j_{th}}.\overrightarrow{u_r} = h(T(R) - T_{eau})$.

23. Il faut ici estimer un ordre de grandeur pour h. Etant donné qu'il s'agit d'eau, qui plus est en convection forcée assez vigoureuse, le h est sans doute assez élevé. Une valeur de 5000 $\text{W.m}^{-2}\text{.K}^{-1}$ serait sans doute un bon ordre de grandeur.

    On a alors $T(R) = T_{eau} + \frac{j_{th}(R)}{h}$. Le second terme vaut environ 300 K, qui s'ajoutent à la température obtenue précédemment : on peut donc estimer $T(0) \simeq 1200$ °C.

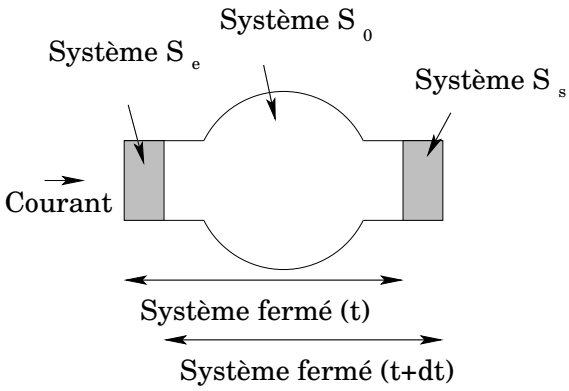
24. A courant thermique donné, plus la conductivité est grande, plus la pente $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}$ est faible (en valeur absolue). On est à des températures où la conductivité thermique est inférieure à la conductivité thermique indiquée (puisque $T(R) \simeq 900$ K), ce qui aura tendance à augmenter la pente $|\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}|$ par rapport au modèle, et donc à augmenter la température au centre du crayon.

III Du réacteur aux turbines

III.A Approche générale

25. C'est du cours, à condition de faire l'hypothèse (non précisée) que l'énergie mécanique du système est négligeable.

    Dans un système en écoulement permanent, on délimite un système fermé, contenant la zone sur laquelle on veut faire un bilan. On étudie l'évolution de ce système durant un temps dt. On note $S(t)$ le système à t et $S(t + \mathrm{d}t)$ le système à $t + \mathrm{d}t$. Ces systèmes peuvent être décomposés en sous-systèmes : le système S_0 est l'intersection de $S(t)$ et $S(t + \mathrm{d}t)$, et on peut écrire que $S(t)$ est composé de S_0 et d'un système infinitésimal S_e (qui correspond à ce qui est "perdu" par le système fermé), alors que $S(t + \mathrm{d}t)$ est composé de S_0 et d'un sysstème infinitésimal S_s (qui correspond à ce qui est "gagné" par le système fermé). Au cours du temps dt, la portion de fluide recoit une chaleur $\delta Q = P_{th}\mathrm{d}t$ et un travail $\delta W = P_u\mathrm{d}t$ de l'extérieur du fluide.



    La masse du système fermé est conservée, ce qui implique que la masse δm des systèmes S_e et S_s est identique.

    Si on applique le premier principe au système fermé, on obtient :

    $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q + \delta W_i$, où δW_i est le travail interne au fluide, c'est à dire le travail des forces de pression à l'entrée et à la sortie du système.

    Si on note δV_e le volume de S_e, et P_e la pression à l'entrée, le travail correspondant est $\delta W_e = P_e\delta V_e$ (comme δV_e est perdu par le système, la variation de volume du système due à P_e est $-\delta V_e$.

    De même, on obtient à la sortie $\delta W_s = -P_s\delta V_s$, car le volume δV_s est gagné par le système.

De plus, U est une fonction d'état extensive, donc $U(t+\mathrm{d}t) = U_0 + \delta U_s$, alors que $U(t) = U_0 + \delta U_e$ (comme l'écoulement est stationnaire on a les mêmes U_0 dans les deux cas). Donc $\mathrm{d}U = \delta U_s - \delta U_e$. (où δU_s et δU_e correspondent aux énergies internes respectives de S_s et S_e).

On obtient donc :

$\delta U_s - \delta U_e = -P_s \delta V_s + P_e \delta V_e + \delta W + \delta Q$.

Or, on a $\delta U_e + P_e \delta V_e = \delta H_e$, où δH_e est l'enthalpie de S_e. Et de même bien sûr pour S_s.

On a donc :

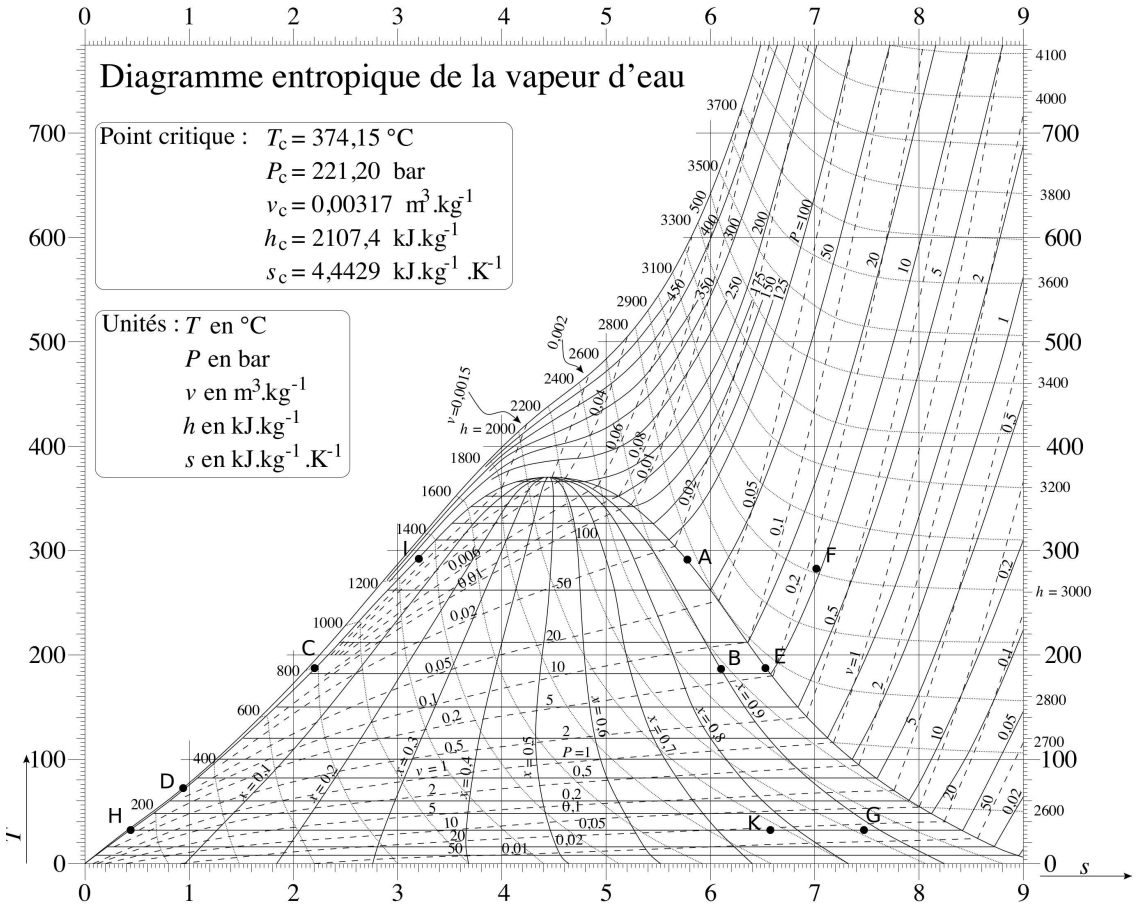
$\delta H_s + \delta E_{m,s} - \delta H_e - \delta E_{m,e} = \delta W + \delta Q$.

On peut diviser par δm pour obtenir des quantités intensives :

$h_s - h_e = (P_u + P_{th}) \frac{\mathrm{d}t}{\delta m}$, ce qui donne la relation demandée sachant que $R = \frac{\delta m}{\mathrm{d}t}$.

III.B Analyse du cycle

26. On obtient :



Précisions sur la construction : ce diagramme s'analyse de la même façon que les diagrammes (p, h) plus usuels : il faut repérer les courbes isobares (qui sont horizontales dans la zone de mélange liquide-vapeur) ; par ailleurs, la courbe de rosée est à droite puisque l'entropie de la vapeur est supérieure à celle du liquide. A partir de là, il faut simplement localiser les points à l'aide des valeurs

de x et P données à chaque fois pour les points dans la zone de mélange ; T et P permettent de localiser F ; Attention à placer A et I sur la même ligne horizontale (ils sont nécessairement à la même température) ; quant à D, visiblement la dépendance en pression de l'entropie est négligeable loin du point critique, il est donc presque sur la courbe de saturation.

Note : Le point K servira dans la suite.

III.B.1 Enthalpies massiques

27. Les indications à droite du graphe permettent d'identifier les courbes d'enthalpie et de conclure que $\boxed{h_F \simeq 3000 \text{ kJ.kg}^{-1}}$.

28. On a dans les deux cas $h = (1-x)h_L + xh_v$, ce qui donne :
$\boxed{h_B = 2,58.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1} \text{ et } h_G = 2,27.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}}$.
Les valeurs obtenues sont cohérentes avec les courbes d'enthalpie.

29. Par lecture graphique $\boxed{h \simeq 300 \text{ kJ.kg}^{-1}}$.

III.B.2 Calcul des différents débits

30. On a $R_0 = R_1 + R_3$ par conservation du débit total ; $R_2 = x_B R_1$ (conservation du débit de vapeur à travers le séparateur) ; $R_4 = (1-x_B)R_1$ (conservation du débit de liquide).

31. On applique la relation donnée question 25 au surchauffeur, dans lequel $P_u = P_{th} = 0$. On a donc :
$\boxed{R_3 h_I + R_2 h_F - R_2 h_E - R_3 h_A = 0}$.

32. $R_0 = 640 \text{ kg.s}^{-1}$ est donné ; pour les autres débits il faut combiner les équations :
$R_3(h_A - h_I) = x_B R_1 (h_F - h_E)$ et $R_0 = R_1 + R_3$.
Les valeurs de h non encore calculées sont données dans les tableaux de valeurs (liquide saturant ou vapeur saturante selon les cas).
Soit : $\boxed{R_1 = R_0 \frac{h_A - h_I}{h_A - h_I + x_B(h_F - h_E)} = 566 \text{ kg.s}^{-1}}$;
$\boxed{R_3 = R_0 - R_1 = 74 \text{ kg.s}^{-1}}$
$\boxed{R_2 = x_B R_1 = 509 \text{ kg.s}^{-1}}$
$\boxed{R_4 = (1-x_B)R_1 = 57 \text{ kg.s}^{-1}}$.

III.B.3 Au niveau des turbines

33. Les transformations étant adiabatiques, si elles sont réversibles elles sont isentropiques. On voit graphiquement que ce n'est pas le cas, l'entropie augmente lors de ces transformations (cela correspond à l'entropie créée). Les causes de cette irréversibilité sont essentiellement mécaniques en raison de la rotation rapide des turbines (les transferts thermiques sont trop lents pour apporter une irréversibilité significative).

III.B.4 Au niveau du condenseur

34. On a le même type de relation : en notant R_t le débit du circuit tertiaire, C la capacité calorifique de l'eau (qui n'était pas donnée, même si on peut la retrouver par lecture graphique en lisant $h(100) - h(0)$) et ΔT la variation de température associée, $R_t c \Delta T = R_2(h_G - h_H)$.

On a alors : $\boxed{R_t = \frac{R_2(h_G - h_H)}{c\Delta T} = 5,2.10^4 \text{ kg.s}^{-1}}$ (en prenant $c = 4,2 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$)

Cela correspond à un débit volumique de 52 $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$, on commence donc à avoir des valeurs comparables à une rivière. La limite de l'élevation de température est essentiellement écologique, de façon à ne pas trop élever la température de la rivière utilisée...

III.C Rendement du cycle

III.C.1 Rendement effectif

35. On peut écrire $r = -\frac{P_{HP}+P_{BP}}{Q_{GV}}$ (l'énergie utile est récupérée au niveau des turbines, l'énergie coûteuse est la chaleur fournie au générateur de vapeur).

On a donc $\boxed{r = \frac{R_1(h_A - h_B)+R_2(h_F - h_G)}{R_0(h_A - h_D)} = 0,30}$

Cela donne un rendement de l'ordre de 30 %, qui est assez classique pour une centrale thermique ou un moteur thermique (les centrales à gaz pouvant faire un peu mieux et atteindre un rendement de plus de 40 %).

36. Il y aurait dans ce cas une unique turbine partant de A et arrivant à la basse pression (0,05 bar). En prolongeant la droite AB (ce qui est raisonnable, une turbine associée à une variation plus grande de pression créant une entropie supplémentaire), on arrive au point K. On peut alors estimer le rendement simplement à l'aide des variations d'enthalpie lors des phases AK (motrice) et CA (chauffage par le primaire), car le débit est conservé durant tout le cycle $A \to K \to H \to C \to A$) :

$\boxed{r = \frac{h_A - h_K}{h_A - h_C} = 0,30}$

(on lit $h_K = 1950 \text{ kJ.kg}^{-1}$).

Soit un rendement inchangé (aux approximations liées à la position du point K près). La précision de l'étude n'est donc pas suffisante pour conclure sur l'intérêt (ou non) du surchauffeur vis-à-vis du rendement, une étude plus précise serait nécessaire. Le surchauffeur peut cependant avoir d'autres intérêts, par exemple de limiter la quantité de liquide dans les turbines, ce qui augmente leur durée de vie.