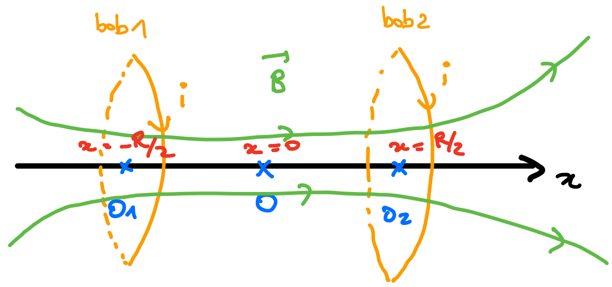
Exercice 4

On considère le dispositif appelé « bobines de Helmoltz » : Deux bobines de rayon R et de longueur faible devant leur rayon, comportant chacune N spires, placées de manière à ce que leurs axes coincident et à la distance R l'une de l'autre. On pourra assimiler chaque bobine à N spires exactement superposées. L'intérêt de ce dispositif est d'avoir un champ magnétique approximativement uniforme entre les bobines. On cherche à le montrer en ce qui concerne le champ sur l'axe.

1. Faire un schéma indiquant les sens des courants et du champ magnétique.
2. Donner l'expression du champ magnétique sur l'axe entre les deux bobines.
3. Déterminer l'expression du champ au centre du dispositif.
4. Application numérique pour $N = 500$, $I = 2,5A$ et $R = 25cm$.
5. En effectuant un développement limité au troisième ordre en z/R vérifier que, au voisinage du milieu, le champ magnétique sur l'axe est approximativement uniforme.

1. →

2. On somme les contributions des 2 bobines (principe de superposition).
On fait l'approximation des bobines plates (N spires confondues) :



$\vec B = \vec B_1 + \vec B_2$ avec $\vec B_1 = \frac{\mu_0 N i}{2R}\left(1+\frac{(x+R/2)^2}{R^2}\right)^{-3/2}\vec e_x$ et $\vec B_2 = \frac{\mu_0 N i}{2R}\left(1+\frac{(x-R/2)^2}{R^2}\right)^{-3/2}\vec e_x$

3. Au centre du dispositif, $x=0$, donc $\boxed{\vec B(0) = \frac{\mu_0 N i}{R}\left(\frac{5}{4}\right)^{-3/2}\vec e_x}$

4. A.N : $B(0) = 4,5\ mT$

5. $\left(1+\frac{(x+R/2)^2}{R^2}\right)^{-3/2} = \left(\frac54+\frac{x}{R}+\frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2} = \left(\frac54\right)^{-3/2}\cdot\left(1+\frac45\left(\frac{x}{R}+\frac{x^2}{R^2}\right)\right)^{-3/2}$

on développe au 3e ordre :

$$\left(1+\frac45\left(\frac{x}{R}+\frac{x^2}{R^2}\right)\right)^{-3/2} \simeq 1-\frac32\cdot\frac45\left(\frac{x}{R}+\frac{x^2}{R^2}\right)+\frac12\left(-\frac32\right)\left(-\frac52\right)\left(\frac45\right)^2\left(\frac{x^2}{R^2}+\frac{2x^3}{R^3}\right)$$
$$+\frac16\left(-\frac32\right)\left(-\frac52\right)\left(-\frac72\right)\left(\frac45\right)^3\frac{x^3}{R^3}$$

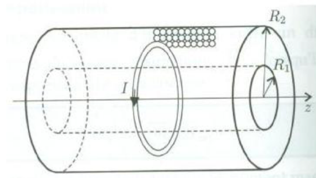
$= \frac12\cdot\left(-\frac32\right)\left(-\frac52\right)\left(\frac45\right)^2$

$$\simeq 1-\frac65\frac{x}{R}+\frac{x^2}{R^2}\underbrace{\left(-\frac65+\frac65\right)}_{=0}-\frac{x^3}{R^3}\underbrace{\left(\frac{12}{5}-\frac{28}{25}\right)}_{=\frac{32}{25}}$$

de même, $\left(1+\frac{(x+R/2)^2}{R^2}\right)^{-3/2} = \left(\frac54\right)^{-3/2}\left(1+\frac45\left(-\frac{x}{R}+\frac{x^2}{R^2}\right)\right)^{-3/2} \simeq \left(\frac54\right)^{-3/2}\left[1+\frac65\frac{x}{R}+\frac{32}{25}\frac{x^3}{R^3}\right]$

finalement, à l'ordre 3, $\vec B(x) \simeq \vec B(0)$

Exercice 6



1. Déterminer le champ magnétique crée en tout point de l'espace par la distribution de courant définie de la manière suivante en coordonnées cylindrique (r, θ, z) d'axe (Oz) :

$$\vec{j}(M) = j_0\overrightarrow{e_\theta}\ si\ R_1 < r < R_2$$
$$\vec{j}(M) = \overrightarrow{0}\ sinon.$$

On admettra que ce champ magnétique est nul pour $r > R_2$.

2. La distribution présente modélise un solénoïde constitué par plusieurs couches de spires coaxiales enroulées sur un cylindre d'axe Oz entre un rayon intérieur R_1 et un rayon extérieur R_2. Ce solénoïde comporte :

i- n spires par unité de longueur dans chaque couche.

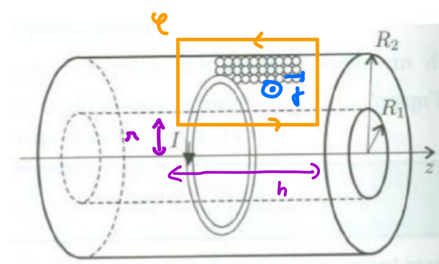
ii- m couches par unité d'épaisseur.

Sa longueur suivant Oz est très supérieur à R_1 et R_2.

Exprimer la densité volumique de courant moyenne dans l'enroulement en fonction de n, m et I, intensité du courant le traversant

3. Exprimer le champ magnétique à l'intérieur de la bobine ($r < R_1$) en fonction de I en négligeant les effets de bord. Retrouver ce résultat à partir de l'expression du champ créé par une seule couche.

1. C'est assez semblable au solénoïde infini, il y a en particulier les mêmes symétries : $\vec{B} = B(r)\,\vec{e_z}$



On utilise le th d'Ampère sur le contour ℓ représenté ci contre : $\oint_\ell \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = B(r)\,h$

(car $\vec{B} = \vec{0}$ à l'extérieur, pour $r > R_2$).

Ensuite, $I_e = j_0 h (R_2 - R_1)$ si $r \leq R_1$

et $I_e = j_0 h (R_2 - r)$ si $R_1 \leq r \leq R_2$

D'où
$$\boxed{\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 j_0 (R_2 - R_1)\,\vec{e_z} & \text{si } r \leq R_1 \\ \mu_0 j_0 (R_2 - r)\,\vec{e_z} & \text{si } R_1 \leq r \leq R_2 \end{cases}}$$

2. Par unité de surface, il y a n.m spires, et donc un courant n.m.i, d'où $j_0 = n m i$

3. $\vec{B} = \mu_0 j_0 (R_2 - R_1)\,\vec{e_z}$ d'après la question 1.

D'où $\boxed{\vec{B} = \mu_0 n i m (R_2 - R_1)\,\vec{e_z}}$

Pour une seule couche, $\vec{B} = \mu_0 n i \,\vec{e_z}$ (expression classique).

Il suffit ensuite de multiplier par le nombre de couches, qui vaut $m(R_2 - R_1)$, où $R_2 - R_1$ est l'épaisseur (on est "à l'intérieur du solénoïde" pour toutes les couches) —