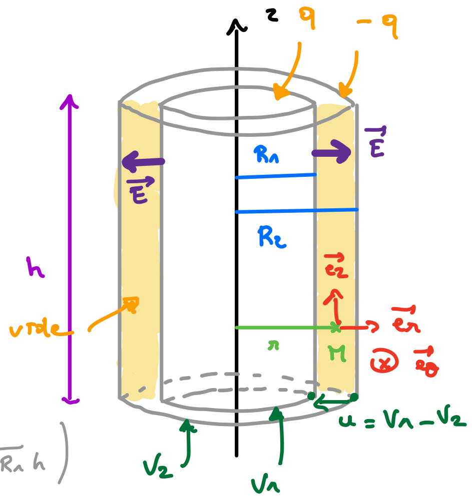
Exercice 5

On imagine un condensateur de géométrie cylindrique : deux armatures sphériques de rayons R_1 et R_2 et de hauteur h séparées par du vide. Calculer sa capacité.



Pour calculer le champ électrique, on raisonne comme si les cylindres étaient infinis selon (Oz).

On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z).

Les symétries et invariances donnent $\vec{E} = E(r)\,\vec{e_r}$

Le th de Gauss appliqué à une surface cylindrique de rayon r et de hauteur ℓ fermée par 2 disques donne $2\pi r \ell\, E(r) = \frac{q\ell}{\varepsilon_0 h}$

(la charge intérieure est $Q_{int} = \sigma \cdot 2\pi R_1 \ell$ avec $\sigma = \frac{q}{2\pi R_1 h}$)

Donc $\vec{E} = \frac{q}{2\pi \varepsilon_0 h r}\,\vec{e_r}$.

Comme $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) = -\frac{dV}{dr}\,\vec{e_r}$, $\frac{dV}{dr} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h r}$ et donc $V = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln(r) + c^{ste}$

D'où $u = V_1 - V_2 = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$

Par définition, $C = \frac{q}{u}$ et on en déduit $\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln(R_2/R_1)}}$

Exercice 7

Une boule, de centre O et de rayon a, est chargée avec la densité volumique variable :
$\rho(u) = \rho_0 \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)$ pour $u \leq a$ et $\rho(u) = 0$ pour $u >$ a avec $u = OP$ (le point P décrit la charge)

a. Déterminer la direction et les variables du champ électrostatique $\vec{E}$ en tout point M de l'espace avec $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e}_r$.

b. Déterminer la charge $Q(r)$ intérieure à la sphère de centre O et de rayon r.

Attention, r est la variable de la fonction Q et u est la variable de la fonction ρ. Lors *du* calcul d'intégration, u doit disparaître et r peut apparaître.

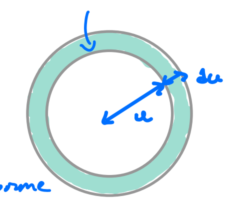
c. Déterminer l'expression du champ $\vec{E}$ créé par cette boule chargée puis celle du potentiel électrostatique V en tout point M de l'espace.

a. ρ ne dépend que de la coordonnée radiale, c'est donc une distribution de charges à symétrie sphérique, les symétries et invariances permettent d'établir que $\vec{E} = E(r)\,\vec{e_r}$.

b. $Q(r) = \iiint_V \rho(u)\, dV = \int_0^r 4\pi u^2 \rho(u)\, du$

on intègre sur u en considérant de petits volumes "coquilles sphériques" concentriques, sur lesquels u est uniforme

volume $4\pi u^2 du$



Avec $\rho(u) = \rho_0 \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)$, on obtient :

$$Q(r) = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) . 4\pi u^2 du = 4\pi \rho_0 \left(\int_0^r u^2 du - \frac{1}{a^2} \int_0^r u^4 du \right)$$

D'où $\boxed{Q(r) = 4\pi \rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right)}$

c. On utilise le th de gauss pour une sphère de rayon r, avec $\underline{r \leq a_0}$:

c'est à dire que l'on se place à l'intérieur de la sphère chargée de rayon a.

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right)$$

donc $\boxed{\underset{r \leq a_0}{E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right)}}$ $\left(\text{et } \vec{E} = E(r)\,\vec{e_r} \right)$

Enfin, $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) = -\frac{dV}{dr}\vec{e_r}$, donc $\frac{dV}{dr} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right)$

et on intègre : $\boxed{\underset{r \leq a_0}{V = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20a^2} \right) + c^{ste}}}$

A l'extérieur, pour $r \geq a_0$, on retrouve les résultats classiques

$$\vec{E} = \frac{Q_{tot}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e_r} \quad \text{et} \quad V = \frac{Q_{tot}}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad \text{avec } Q_{tot} = Q(r=a) = \frac{8\pi\varepsilon_0 a^3}{15}$$

On peut déterminer la c^{ste} de V pour $r \leq a_0$ par continuité de V en $r = a_0$.

Exercice 8

Déterminer le champ $\vec{E}$ et le potentiel V électrostatiques créés par un cylindre droit, infini d'axe Oz, de rayon R, portant une densité de charges linéique λ en un point M extérieur au cylindre. En déduire la différence de potentiel entre deux conducteurs cylindriques, de rayons R et R ', dont les axes parallèles sont distants de $d\,(d >> R$ et $R')$, portants respectivement les densités de charges linéiques λ et $-\lambda$ puis la capacité linéique Γ de cette ligne bifilaire.

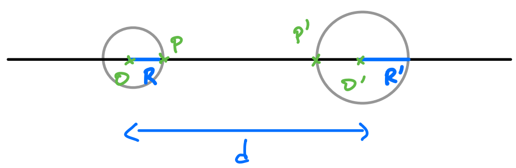
Cas particulier où $R = R'$.

distribution volumique dans les cylindres : $\rho = \dfrac{\lambda \ell}{\pi R^2 \ell} = \dfrac{\lambda}{\pi R^2}$ et $\rho' = \dfrac{-\lambda}{\pi R'^2}$

pour un cylindre, avec r coord radiale : $\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e_r} = \dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{e_r} & (r \leq R) \\ \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\vec{e_r} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e_r} & (r \geq R) \end{cases}$

$$V = \begin{cases} \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2 - r^2) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R^2}(R^2 - r^2) & \text{si } r \leq R \\ -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r}{R}\right) = \dfrac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r}{R}\right) & \text{si } r \geq R \end{cases}$$

avec $V(r = R) = 0$



$$V_{tot}(M) = \underbrace{V}_{\text{contribution fil chargé } \lambda} + \underbrace{V'}_{\text{contribution fil chargé } -\lambda}$$

et $u = V_{tot}(P) - V_{tot}(P')$

$$= \Big(\underbrace{0}_{V(P)} + \underbrace{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-R}{R'}\right)}_{V'(P)}\Big) - \Big(\underbrace{0}_{V'(P')} - \underbrace{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d-R'}{R}\right)}_{V(P')}\Big)$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{(d-R)(d-R')}{RR'}\right) \simeq \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{d^2}{RR'}\right)$$

car $d \gg R$, R'

pour une longueur ℓ, $q = \lambda \ell$ et $q = C u$ donc $C = \dfrac{2\pi\varepsilon_0 \ell}{\ln\left(\frac{d^2}{RR'}\right)}$

donc capacité linéique $\boxed{\Gamma = \dfrac{C}{\ell} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\frac{d^2}{RR'}\right)}}$

et si $R = R'$, $\Gamma = \dfrac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/R)}$