Exercice 8

1. Il n'y a pas de frottements, donc em est conservée (le poids est conservatif avec $e_p = mgz$ et la réaction "ne travaille pas").

Donc $e_c + e_p = \frac{1}{2} m v^2 + mgz = c^{ste}$.

On applique cette conservation entre la position initiale et celle où $z = 0$:

$0 + mgh = \frac{1}{2} m v^2 + 0$. D'où $\boxed{v = \sqrt{2gh}}$

2. Lorsque $\theta = 0$, $z = h$. De plus h diminue de a lorsque θ augmente de 2π (1 tour). Donc $\boxed{z = h - \frac{a\theta}{2\pi}}$.

3. En coordonnées cylindriques, on peut écrire $\vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{z}\,\vec{e_z}$

($r = c^{ste}$, donc $\dot{r} = 0$). Donc $v^2 = R^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$

Or $\dot{z} = -\frac{a}{2\pi}\dot{\theta}$ (car $z = h - \frac{a\theta}{2\pi}$), donc $\dot{\theta} = -\frac{2\pi}{a}\dot{z}$,

et donc $v^2 = R^2\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \dot{z}^2 + \dot{z}^2 = \dot{z}^2\left(\left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2 + 1\right)$

Soit, en notant $v_z = \dot{z}$: $\boxed{v^2 = v_z^2\left(1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2\right)}$

4. $e_c + e_p = c^{ste}$, donc $\frac{1}{2} m v^2 + mgz = c^{ste}$, soit $\frac{1}{2} m v_z^2\left(1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2\right) + mgz = c^{ste}$

On dérive (/ temps) : $\frac{1}{2} m \cdot 2 v_z \frac{dv_z}{dt}\left(1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2\right) + mg\frac{dz}{dt} = 0$

Comme $v_z = \frac{dz}{dt}$, on obtient $\frac{dv_z}{dt}\left(1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)\right)^2 + g = 0$

Et donc $\boxed{\frac{dv_z}{dt} = -\frac{g}{1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2}}$

5. On a donc, compte tenu des conditions initiales :

$\boxed{v_z = -\frac{g}{1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2} t}$ et $\boxed{z = h - \frac{1}{2}\frac{g}{1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2} t^2}$

6. On en déduit que $\boxed{\dot{\theta} = \frac{2\pi g}{a + \frac{(2\pi R)^2}{a}} t \text{ et } \theta = \frac{\pi g}{a + \frac{(2\pi R)^2}{a}} t^2}$

7. La 2e loi de Newton donne $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N}$,

avec $\vec{P} = -mg\,\vec{e_z}$ et $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \ddot{z}\,\vec{e_z}$,

soit $\vec{a} = -R\left(\frac{2\pi g}{a + \frac{(2\pi R)^2}{a}}\right)^2 t^2\,\vec{e_r} + \frac{2\pi}{a}\frac{g}{1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2}\vec{e_\theta} - \frac{g}{1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2}\vec{e_z}$

D'où $\vec{R_N} = -mR\left(\frac{2\pi g}{a + \frac{(2\pi R)^2}{a}}\right)^2 t^2\,\vec{e_r} + \frac{2\pi m}{a}\frac{g}{1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2}\vec{e_\theta} - mg\left(1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi R}{a}\right)^2}\right)\vec{e_z}$.

exercice 9

1 – oui, car le moment d'inertie d'un solide par rapport à un certain axe ne dépend pas de son étendue dans la direction de cet axe.

oui, il dépendrait de l'épaisseur si elle n'était pas considérée comme nulle.

$J_{Oy} = J_{Gy} + \frac{1}{2} m\, OG^2$. D'où $J_{Oy} = \frac{ma^2}{3} + m\delta^2$.

2. $\frac{dL_{Oy}}{dt} = M_{Oy}(\vec{P}) + M_{Oy}(\vec{R})$. $M_{Oy}(\vec{R}) = 0$ car la réaction de la table $\vec{R}$ passe par l'axe de rotation.

on fait le calcul en choisissant l'axe qui passe par O et de vecteur $-\vec{e_y}$, ainsi $\omega = \dot{\theta}$.

$M_{Oy}(\vec{P}) = (\vec{OG} \wedge \vec{P})\cdot(-\vec{e_y}) = \delta m g \cos(\theta)$

$L_{Oy} = J_{Oy}\, \omega =$

on en déduit donc : $J_{Oy} \frac{d\omega}{dt} = m g \delta \cos(\theta)$

3. $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \ddot{\theta}$ On reprend l'équation précédente que l'on multiplie par $\dot{\theta}$:

$J_{Oy}\, \ddot{\theta}\, \dot{\theta} = m g \delta \cos(\theta)\, \dot{\theta}$ et on intègre / t : $J_{Oy} \frac{\dot{\theta}^2}{2} = m g \delta \sin(\theta) + c^{ste}$.

Comme $\theta = 0$ lorsque $\dot{\theta} = 0$, $c^{ste} = 0$. Donc $J_{Oy} \frac{\omega^2}{2} = m g \delta \sin(\theta)$

soit $\omega^2 = \frac{2 m g \delta}{J_{Oy}} \sin(\theta)$, et donc $\omega^2 = \omega_0^2 \sin\theta$ avec $\omega_0^2 = \frac{2 m g \delta}{J_{Oy}}$.

On a donc $\omega_0^2 = \frac{2 m g \delta}{\frac{ma^2}{3} + m\delta^2} = \frac{6 g \delta}{a^2 + 3\delta^2}$, soit $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{6 g \delta}{a^2 + 3\delta^2}}}$

4. On tourne cette fois autour de l'axe (Gy). La seule force est le poids, et son moment est nul (passe par l'axe). Donc (th moment cinétique), $L_{Gy} = c^{ste}$.

Donc $\dot{\theta} = c^{ste}$ ($L_{Gy} = J_{Gy}\, \dot{\theta}$). Initialement, $\theta = \pi/2$ et $\dot{\theta} = \omega_0$. Donc $\theta = \frac{\pi}{2} + \omega_0 t$

5. le th. de la q^{té} de m^{vt} donne $m \vec{a_G} = \vec{P}$ il s'agit donc d'une chute libre pour G : $z_G = \delta + \frac{1}{2} g t^2$. lorsque $z_G = h$, $t = \sqrt{\frac{2(h-\delta)}{g}} \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}}$. A.N : $t_f \simeq 0{,}39$ s

Donc aucune chance de rattraper ... (temps de réaction ~ 1 s)

6. en utilisant ce qui précède, $\theta_f = \pi/2 + \omega_0 t_f$ avec $\omega_0 = 4{,}85$ rad·s^{-1} et $t_f = 0{,}39$ s.

D'où $\theta_f \simeq 189°$ la tartine tombe "côté beurre" ...