

Exercice 5

Du fait de la rotation de la Terre, les objets en chute libre sont déviés vers l'est au cours de leur chute. Ceci fut mis en évidence en 1833 par Ferdinand Reich.

On lâche sans vitesse initiale un objet de masse m , depuis le sol dans un puits de profondeur h , à partir d'un point situé à la latitude λ dans l'hémisphère Nord. On néglige les frottements, ainsi que les variations de l'accélération de la pesanteur g avec l'altitude. En revanche, on tient compte de la rotation de la Terre, à la vitesse angulaire Ω . On rappelle que la force centrifuge est comptabilisée dans le poids et ne doit pas être considérée comme une

force supplémentaire. La direction de $\vec{g}$ est supposée constante au cours du mouvement. $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $h = 158 \text{ m}$ et $\lambda = 51^\circ$.

On choisit la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ avec $\vec{u}_y$ dirigé vers l'ouest et $\vec{u}_z$ vertical ascendant.

a. Montrer, sans autre approximation, que la chute est déviée vers l'est d'une distance :

$$y = \frac{g \cos \lambda}{4\Omega^2} (\sin(2\Omega t) - 2\Omega t)$$

b. En déduire que dans des conditions de chute réalistes, $y \cong -\frac{g\Omega \cos \lambda}{3} t^3$. Comment aurions-nous pu trouver ce résultat plus rapidement ?

c. Calculer numériquement la déviation vers l'est pour une chute sur une hauteur h .

$$a. \quad m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{f}_{ic}$$

$$\text{avec } \vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$$

$$= -2m\omega (\cos \lambda \vec{e}_n + \sin \lambda \vec{e}_z) \wedge (v_n \vec{e}_n + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z)$$

$$= -2m\omega (\cos \lambda v_y \vec{e}_z - \cos \lambda v_z \vec{e}_y + \sin \lambda v_n \vec{e}_y - \sin \lambda v_y \vec{e}_n)$$

$$\text{On projette : } \begin{cases} \dot{v}_n = 2\omega \sin \lambda v_y & (1) \\ \dot{v}_y = 2\omega (\cos \lambda v_z - \sin \lambda v_n) & (2) \\ \dot{v}_z = -g - 2\omega \cos \lambda v_y & (3) \end{cases}$$

On dérive (2) puis on injecte (1) et (3) :

$$\ddot{v}_y = 2\omega (\cos \lambda (-g - 2\omega \cos \lambda v_y) - \sin \lambda \cdot 2\omega \sin \lambda v_y)$$

$$= -2\omega \cos \lambda g - 4\omega^2 \cos^2 \lambda v_y - 4\omega^2 \sin^2 \lambda v_y$$

$$\text{Soit } \ddot{v}_y + 4\omega^2 v_y = -2\omega \cos \lambda g$$

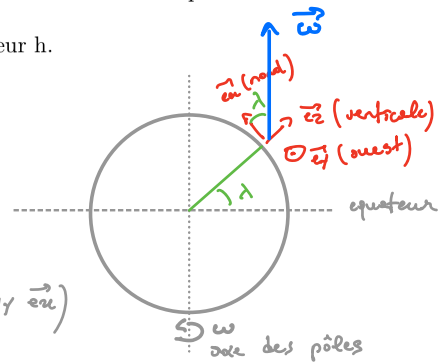
$$\text{On résout cette équation : } v_y = A \cos(2\omega t + \phi) - \frac{g \cos \lambda}{2\omega}$$

avec $v_y(t=0) = 0$ (vitesse initiale nulle)

et $\dot{v}_y(t=0) = 0$ ($\dot{\phi} = 0$, pas de vitesse, donc poids uniquement $\Rightarrow$ pas d'accélération sur $\vec{e}_y$)

$$\text{On en déduit } \phi = 0 \text{ et } A = \frac{g \cos \lambda}{2\omega}$$

$$\text{D'où } v_y = \frac{g \cos \lambda}{2\omega} (-1 + \cos(2\omega t))$$



On intègre pour obtenir y , avec $\gamma(t=0) = 0$:

$$\gamma = \frac{g \cos \lambda}{2\omega} \left(-t + \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right), \text{ soit } \boxed{\gamma = \frac{g \cos \lambda}{4\omega^2} \left(\sin(2\omega t) - 2\omega t \right)}$$

b. $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, donc $\omega t \ll 1$ (la chute dure nettement moins de quelques heures $\sim 10^4 \text{ s} \dots$)

Alors, $\sin(2\omega t) \approx 2\omega t - \frac{(2\omega t)^3}{6}$ (DL ordre 3)

$$\text{D'où } \gamma = -\frac{g \cos \lambda}{4\omega^2} \cdot \frac{8\omega^3 t^3}{6}, \text{ soit } \boxed{\gamma = -\frac{g \cos \lambda \omega t^3}{3}}$$

On peut trouver ceci plus rapidement via l'approximation $\vec{f}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge (-g\vec{e}_z)$,
c'est à dire que l'on considère que seule la vitesse verticale influence sur Coriolis.

c. A.N : $\Delta y \approx 2,74 \text{ cm}$ ($t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 5,67 \text{ s}$)

Exercice 6

Un point matériel M , de masse m , se déplace sans frottement sur une circonférence de centre C et de rayon a , contenue dans un plan vertical. Par rapport au référentiel terrestre, supposé galiléen, ce cercle tourne à la vitesse angulaire ω constante autour d'un axe vertical tangent à la circonférence (la position du point M est repérée par l'angle θ que fait $\overrightarrow{CM}$ avec la verticale descendante).

- Déterminer une équation donnant les valeurs θ des positions d'équilibre de M sur la circonférence.
- Donner la stabilité de ces équilibres.
- La première position d'équilibre vaut $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$. Déterminer la période T des petites oscillations.

- a. bilan des forces :
- poids (conservative)
 - réaction normale (travail nul)
 - coriolis (travail nul)
 - centrifuge (conservative)

On a donc $e_m = e_c^{1/2}$ avec $e_p = e_{pp} + e_{pc}$

où $e_{pp} = m g a (1 - \cos \theta)$ et $e_{pc} = -\frac{1}{2} m \omega^2 a^2 (1 + \sin \theta)^2$

Les positions d'équilibre sont données par $\frac{d e_p}{d \theta} = 0$,

donc $m g a \sin \theta - \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 \cdot 2 (1 + \sin \theta) \cos \theta = 0$

soit $g \sin \theta = a \omega^2 \cos \theta (1 + \sin \theta)$ (eq)

c. On a besoin d'une constante "de rappel élastique" :

$e_p = \frac{1}{2} k \varepsilon^2$ au voisinage de $\theta_{eq} = \pi/6$.

On pose donc $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$.

$$k = \frac{d^2 e_p}{d \theta^2} \Big|_{\theta = \pi/6} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 e_p}{d \theta^2} = \frac{d}{d \theta} \left(\frac{d e_p}{d \theta} \right) = m g a \cos \theta - m \omega^2 a^2 \left(\cos^2 \theta - \sin \theta (1 + \sin \theta) \right)$$

$$= m g a \frac{\sqrt{3}}{2} - m \omega^2 a^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} (1 + 1/2) \right)$$

0

on a donc $e_m = e_c + e_p \approx \frac{1}{2} m a^2 \dot{\varepsilon}^2 + \frac{1}{2} k \varepsilon^2$

On dérive : $0 = \frac{d}{dt} (m a^2 \dot{\varepsilon} + k \varepsilon)$, soit $\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m a^2}$

soit $\omega_0^2 = \frac{m g a \sqrt{3}/2}{m a^2} = \frac{g \sqrt{3}}{2 a}$ et donc

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{g\sqrt{3}}}$$

