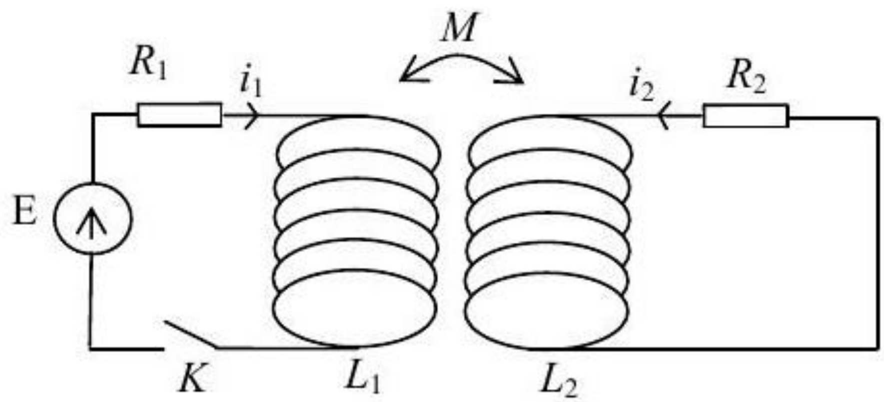
Exercice 6

Dans le circuit représenté ci-dessous, la fém E est constante, les deux bobines sont couplées avec une inductance mutuelle M. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.



1. Prévoir qualitativement les valeurs des courants i_1 et i_2 pour $t = 0$ et après un temps «très long ».

2. Donner les circuits équivalents en modélisant par des fém les phénomènes d'induction dans les bobines L_1 et L_2.

On suppose pour simplifier $R_1 = R_2 = R$ et $L_1 = L_2 = L$.

3. Écrire le système d'équations différentielles couplées vérifiées par les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$

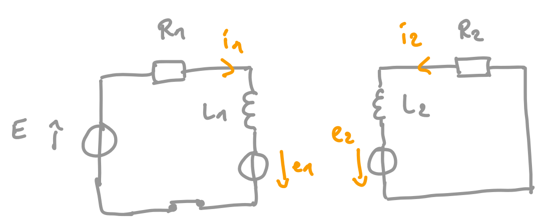
4. La symétrie de ce système différentiel permet de le découpler en introduisant les fonctions intermédiaires $S(t) = i_1(t) + i_2(t)$ et $D(t) = i_1(t) - i_2(t)$. Écrire les équations différentielles vérifiées par $S(t)$ et $D(t)$.

5. Résoudre les équations différentielles précédentes. Déterminer enfin les expressions des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$. Représenter l'allure des courbes de ces intensités.

1. Suite à la fermeture de K, pour $t \to \infty$, $i_1 = \frac{E}{R_1}$ et $i_2 = 0$

2. Une bobine peut être modélisée par une seule fém qui prend en compte l'induction propre et l'induction extérieure, ou par l'association d'une inductance pure et d'une fém (associée à l'induction extérieure).

Donc :



avec $e_1 = -M \frac{di_2}{dt}$ et $e_2 = -M \frac{di_1}{dt}$

3. (1) : $E = -e_1 + L \frac{di_1}{dt} + Ri_1$, soit $E = M \frac{di_2}{dt} + L \frac{di_1}{dt} + Ri_1$

(2) : $0 = -e_2 + L \frac{di_2}{dt} + Ri_2$, soit $0 = M \frac{di_1}{dt} + L \frac{di_2}{dt} + Ri_2$

4. $S = i_1 + i_2 \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$

$D = i_1 - i_2 \Rightarrow \frac{dD}{dt} = \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}$

Or, (1) + (2) donne $E = (M+L)\left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right) + R(i_1+i_2)$

donc $\boxed{E = (M+L)\frac{dS}{dt} + RS}$

de même, en faisant (1) − (2), on obtient $E = (L-M)\left(\frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt}\right) + R(i_1 - i_2)$

donc $\boxed{E = (L-M)\frac{dD}{dt} + RD}$

Pour S : $S = \lambda e^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$ avec $\tau = \frac{M+L}{R}$

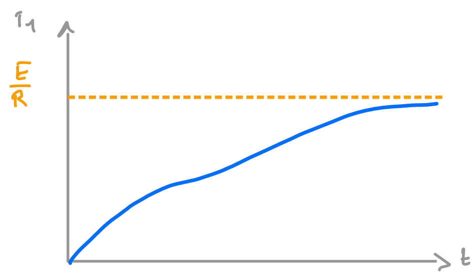
et $S(t=0) = 0$ donc $\lambda = -\frac{E}{R}$

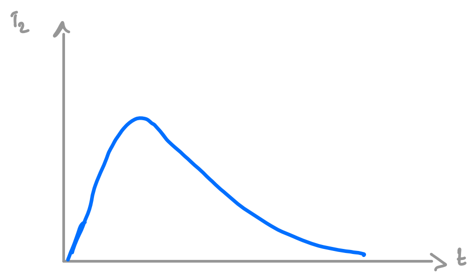
et donc $S = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ Rem : c'est compatible avec la question 1.

Pour D : même principe, $D = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau'}\right)$ avec $\tau' = \frac{L-M}{R}$

On en déduit i_1 et i_2 par $i_1 = \frac{S+D}{2}$ et $i_2 = \frac{S-D}{2}$

D'où $\boxed{i_1 = \frac{E}{R}\left(1 - \frac{1}{2}\left(e^{-t/\tau} + e^{-t/\tau'}\right)\right)}$ et $\boxed{i_2 = \frac{E}{2R}\left(e^{-t/\tau'} - e^{-t/\tau}\right)}$





$$\frac{di_2}{dt} = \frac{E}{2R}\left(-\frac{1}{\tau'}e^{-t/\tau'} + \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\right)$$

$$\frac{e^{-t/\tau'}}{e^{-t/\tau}} = \frac{\tau'}{\tau} \Rightarrow e^{+\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}\right)} = \frac{\tau'}{\tau}$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln(\tau'/\tau)}{\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau'}}$$