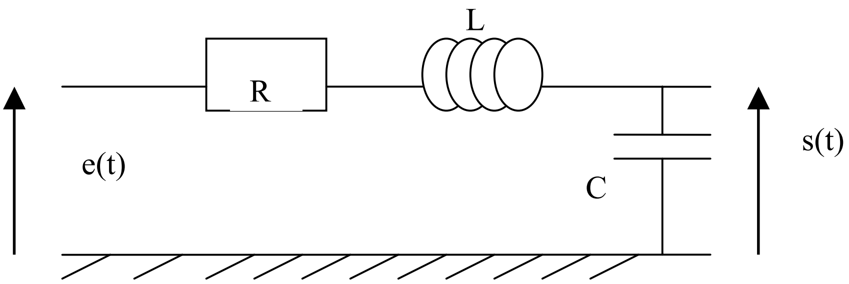
PHYSIQUE

En physique, il est très souvent intéressant de caractériser un système par un paramètre sans dimension, qui ne dépend que de la constitution du système.
Les deux premières parties, *totalement indépendantes*, traitent du facteur de qualité Q, l'une en électrocinétique, l'autre en mécanique. Après introduction du paramètre dans les équations, c'est l'interprétation énergétique de Q qui est favorisée.
La troisième partie, *indépendante des autres*, traite du grossissement G d'un système optique, la lunette astronomique.

PARTIE 1 : LE FACTEUR DE QUALITE EN ELECTROCINETIQUE : ETUDE D'UN FILTRE PASSIF.

On étudie le circuit linéaire ci-dessous.
Il est composé de trois dipôles en série : une résistance R, une inductance parfaite de coefficient d'induction L, et d'un condensateur de capacité C.



Il est soumis à une tension d'entrée sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(wt + \varphi)$. On note $s(t)$ la tension de sortie.
En notation complexe, on notera, pour e(t) par exemple, $\underline{e} = \underline{E_m} e^{jwt} = E_m e^{j\varphi} e^{jwt}$ avec $\underline{E_m}$, l'amplitude complexe.

1. A l'aide de deux schémas équivalents du circuit, l'un en hautes fréquences, l'autre en basses fréquences, donner la nature de ce filtre.

2. Fonction de transfert
   a. Etablir la fonction de transfert de ce filtre sous la forme :

$$\underline{H}(jw) = \frac{1}{1 + j\frac{1}{Q}\frac{w}{w_0} + (j\frac{w}{w_0})^2} \quad \text{avec } w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{Lw_0}{R} = \frac{1}{RCw_0}$$

   Donner l'ordre de ce filtre.

   b. Si e(t) est une fonction quelconque du temps (non sinusoïdale), quelle est l'équation différentielle entre les fonctions s(t) et e(t) ?
   Pour quelle raison peut-on affirmer la convergence du régime transitoire ?

3. Exprimer le module de la fonction de transfert $|\underline{H}(jw)|$, en fonction de w, w_0 et Q.

4. Montrer que $|\underline{H}(jw)|$ passe par un maximum pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Comment appelle-t-on ce phénomène ? Déterminer, w_r, la pulsation correspondant à ce phénomène, en fonction de w_0 et Q.

5. On appelle gain, la fonction G_{dB}, telle que $G_{dB} = 20\log|\underline{H}(jw)|$.
   Donner les équations des asymptotes de G_{dB} aux basses fréquences et aux hautes fréquences.
   Exprimer $G_{dB}(w = w_0)$.
6. Tracer l'allure du diagramme de Bode en gain pour $Q = 10$ et $Q = \frac{1}{10}$ sur la feuille de papier semi-logarithmique fournie.
   On définit les pulsations de coupures (w_c) d'un filtre par la relation : $|H(jw_c)| < \frac{|H(jw)|_{max}}{\sqrt{2}}$.
   Justifier que la bande passante est alors définie à -3dB et placez-la sur les graphes.
7. Interprétation énergétique du facteur de qualité Q.

On suppose $Q >> 1$.

a. Montrer que si $w = w_0$, alors $i(t) = I_{\max}\cos(w_0 t)$.
b. Déterminer alors $u_c(t)$, la tension aux bornes du condensateur en fonction de C, w_0 et $I_{\max}$.
c. On note ΔW , l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance sur une période.

Montrer que $\Delta W = \frac{\pi R I^2{}_{\max}}{w_0}$.

d. On note W_m, l'énergie maximale reçue par le condensateur.

Montrer que $W_m = \frac{I_{\max}{}^2}{2Cw_0{}^2}$.

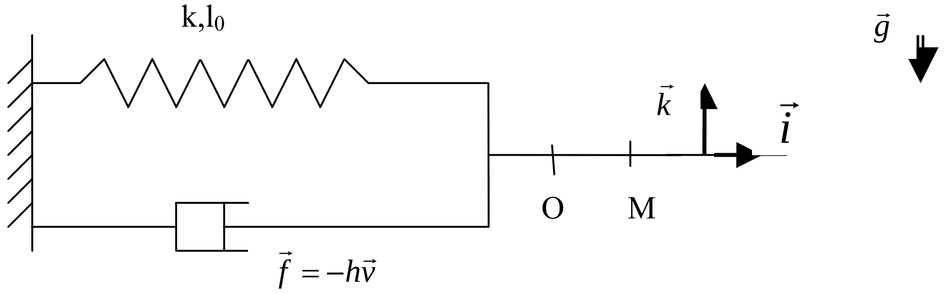
e. En déduire que $Q = 2\pi \frac{W_{\max}}{\Delta W}$.

FIN DE LA PARTIE I

<u>PARTIE 2 : LE FACTEUR DE QUALITE EN MECANIQUE : ETUDE D'UN OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI</u>

On considère le dispositif mécanique suivant, placé dans le référentiel du laboratoire $\Re$, supposé galiléen.
Il est composé d'une bille M, supposée ponctuelle, de masse m qui glisse sans frottement sur un axe horizontal. Elle est reliée :

- à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, maintenu fixé à une de ses extrémités à un mur vertical.
- à un dispositif « amortisseur » fixé au même mur, qui soumet la bille à une force de frottement de type fluide $\vec{f} = -h\vec{v}$.



On note O, la position de la bille quand le ressort est à sa longueur à vide, et en prenant O comme origine, on repère la position de M par $x = \overline{OM}$.

1. Faire un bilan des forces et justifier très brièvement que le système n'est pas conservatif.
   En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la bille, montrer que la variation de l'énergie mécanique s'écrit sous la forme $dE_m = -hv^2 dt$.

2. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à la bille dans $\Re$, et montrer que
$$\ddot{x} + \frac{w_0}{Q}\dot{x} + w_0{}^2 x = 0 \text{ avec } w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{mw_0}{h}.$$

3. On se place dans le cas du régime pseudo-périodique. Les solutions sont de la forme $x(t) = e^{-\frac{w_0}{2Q}t} A\cos(wt + \varphi)$ avec A et φ des constantes, et $w = w_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.
   a. Donner la condition sur Q pour être dans un tel régime.
      Tracer l'allure de $x(t)$.
   b. On se place dans le cas de l'amortissement faible $Q >> 1$. Exprimer $\left|\frac{\Delta T}{T_0}\right| = \left|\frac{T - T_0}{T_0}\right|$ en fonction de Q et en déduire que $w \approx w_0$.

Rappel : Développement limité à l'ordre 1 en u : $(1 + u)^\alpha = 1 + \alpha u$

4. Interprétation énergétique de Q

Dans toute la suite, nous supposerons que $w = w_0$ **.**

   a. Justifier que l'énergie potentielle de M peut s'écrire $Ep(t) = \frac{1}{2}kx^2(t)$, puis expliciter $Ep(t)$.
   b. Expliciter $Ec(t)$, l'énergie cinétique de M en fonction du temps.
   c. Montrer que l'énergie mécanique $Em(t)$ est de la forme $Em(t) = K_1 e^{-K_2 t}$ où l'on exprimera K_1 en fonction de A et k , et K_2 en fonction de w_0 et Q .
   d. On définit la variation d'énergie mécanique par $\Delta E_m(t) = \left|E_m(t+T) - E_m(t)\right|$.

Montrer que $Q = 2\pi \frac{E_m(t)}{\Delta E_m(t)}$.

FIN DE LA PARTIE II