

Loi de Wiedemann-Franz

1) Le calibre le plus adapté est celui qui minimise l'incertitude de mesure, et donc ici la résolution, tout en ne dépassant pas la valeur mesurée. Il s'agit ici du calibre 500 Ω .

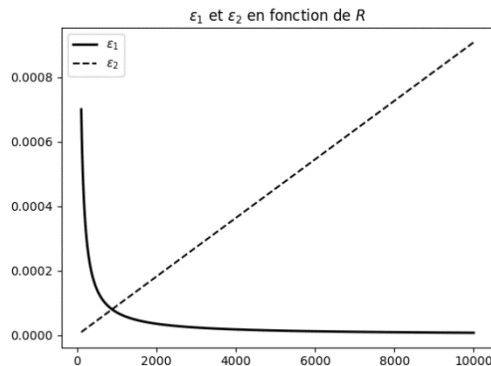
L'incertitude demandée doit être (?) la précision indiquée sur la notice. En assimilant cette précision à l'incertitude type sur la mesure de la résistance R , on a :

$$u(R) = \frac{3}{100} \times 0,1 + 3 \times 0,1 \approx 0,3 \Omega$$

On a $u(R) \approx 3R$, la méthode de mesure n'est pas adaptée.

2) Pour le montage 1, on a $R_1 = U_1/I_1 = R + R_A$, d'où $\varepsilon_1 = R_A/R$. Pour le montage 2, on a $R_2 = U_2/I_2 = RR_V/(R + R_V)$, d'où $\varepsilon_2 = R/(R + R_V)$.

Le tracé des deux erreurs est le suivant :



(tracé effectué avec $R_V = 11 M\Omega$, $R_A = 0.07 \Omega$, valeurs issues des data sheets)

On voit que pour de « faibles » valeurs de R , le montage 2 est préférable.

Rq : L'énoncé ne précise pas si une estimation de cette faible valeur est nécessaire. En écrivant $\varepsilon_1(R_l) = \varepsilon_2(R_l)$ à la limite, on obtient $R_l = \frac{1}{2}(R_A + \sqrt{R_A(R_A + 4R_V)}) \approx \sqrt{R_A R_V} \approx 9 \times 10^2 \Omega$. On est bien dans le cas $R = 0,1 \Omega \ll R_l$.

3) On a $R_2 = U_2/I_2 = \frac{0,2875}{5,23} \approx 5,497 \times 10^{-2} \Omega \approx 5 \times 10^{-2} \Omega$. Comme $R_2 \ll R_V$, on a aussi $R \ll R_V$ et $R \approx R_2 \approx 5 \times 10^{-2} \Omega$.

L'erreur systématique (biais) vaut ici $\varepsilon_2 \approx \frac{5 \times 10^{-2}}{1,1 \times 10^7} \approx 5 \times 10^{-9}$ et est négligeable

ici.

Pour estimer l'incertitude type, on peut donc faire l'approximation $R = U_2/I_2$, d'où une incertitude type relative :

$$\frac{u(R)}{R} = \sqrt{\left(\frac{u(U_2)}{U_2}\right)^2 + \left(\frac{u(I_2)}{I_2}\right)^2}$$

avec $u(I_2) = \frac{1}{100} \times 5,23 + 0,03 = 8,2 \times 10^{-2} A$ et $u(U_2) = \frac{3}{100} \times 0,2875 + 0,0002 = 8,8 \times 10^{-3} V$. On obtient après calcul (sans machine !)

$$u(R) \approx 2 \times 10^{-3} \Omega$$

(on devrait donc écrire $R = 5,5 \times 10^{-2} \pm 2 \times 10^{-3} \Omega$).

La méthode est bien meilleure. On peut remarquer que l'intervalle de cette mesure ($5,5 \times 10^{-2} \pm 2 \times 10^{-3} \Omega$) est contenu dans celui de la première. Pour améliorer la méthode, on peut changer d'appareils de mesure en prenant des appareils de meilleure précision, ou alors changer de montage (pont de Wheatstone avec résistances étalonnées par exemple)

4) Pour un conducteur cylindrique de longueur ℓ , de section circulaire de diamètre d et de conductivité électrique γ , on a en régime stationnaire :

$$R = \frac{\ell}{\gamma \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

d'où

$$\gamma = \frac{\ell}{R \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

On obtient avec un seul chiffre significatif :

$$\gamma \approx 6 \times 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$$

Cette valeur est typique des conductivités électriques des métaux.

5) Question classique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e\vec{E}$$

D'où la vitesse limite :

$$\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

et la densité volumique de courant associée :

$$\vec{j} = -en\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}$$

On a donc $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, avec

$$\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$$

6) Entre t et $t + dt$ soit l'électron n° i subit un choc (avec une proba dt/θ) et sa quantité de mouvement devient $\vec{p}_{i,0}^+$, soit il n'est subit pas (avec une proba $(1 - dt/\theta)$) et sa quantité de mouvement évolue selon $d\vec{p}_i/dt = \vec{f}_c$, d'où à l'ordre 1 $\vec{p}_i(t + dt) = \vec{p}_i(t) + \vec{f}_c dt$. On a donc en sommant les deux évènements :

$$\vec{p}_i(t + dt) = \frac{dt}{\theta} \vec{p}_{i,0}^+ + (1 - dt/\theta)(\vec{p}_i(t) + \vec{f}_c dt)$$

7) En moyennant sur les N électrons, on a :

$$\frac{1}{N} \sum_i \vec{p}_i(t + dt) = \frac{dt}{\theta} \frac{1}{N} \sum_i \vec{p}_{i,0}^+ + (1 - dt/\theta) \left(\frac{1}{N} \sum_i \vec{p}_i(t) + \frac{1}{N} \sum_i \vec{f}_c dt \right)$$

Les quantités de mouvements après chaque choc étant distribuées de manière aléatoire, on a $\frac{1}{N} \sum_i \vec{p}_{i,0}^+ = \vec{0}$. Par ailleurs, \vec{f}_c étant indépendant de i , $\frac{1}{N} \sum_i \vec{f}_c = \vec{f}_c$ d'où :

$$\vec{p}(t + dt) = (1 - dt/\theta)(\vec{p}(t) + \vec{f}_c dt)$$

On a donc

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \vec{f}_c - \frac{1}{\theta} \vec{p}(t) - \frac{1}{\theta} \vec{f}_c dt$$

En prenant la limite $dt \rightarrow 0$, on obtient :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}_c - \frac{1}{\theta} \vec{p}(t)$$

En comparant avec la question 5, on a $\theta = \tau$ (la constante phénoménologique τ de la loi de Drude s'identifie avec celle du modèle stochastique θ).

8) Pour qu'un électron donné ne subisse aucun choc jusqu'à l'instant $t + dt$ (avec la probabilité $\Pi(t + dt)$), il faut qu'il n'ait subi aucun choc jusqu'à l'instant t (avec la probabilité $\Pi(t)$), et qu'il n'en subisse pas non plus entre t et $t + dt$ (avec la probabilité $(1 - dt/\theta)$). On a donc. On a donc

$$\Pi(t + dt) = \Pi(t)(1 - dt/\theta)$$

soit

$$\frac{\Pi(t + dt) - \Pi(t)}{dt} = -\frac{1}{\theta} \Pi(t)$$

En prenant la limite $dt \rightarrow 0$, on obtient comme précédemment :

$$\frac{d\Pi}{dt} = -\frac{1}{\theta} \Pi(t) = -\frac{1}{\tau} \Pi(t)$$

On en déduit

$$\Pi(t) = A e^{-t/\tau}$$

La constante A s'obtient par normalisation des probabilités :

$$\int_{t=0}^{\infty} \Pi(t) dt = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = 1/\tau$$

Le temps moyen entre deux chocs s'obtient par

$$\langle t \rangle = \int_{t=0}^{\infty} t \Pi(t) dt = \frac{1}{\tau} \int_{t=0}^{\infty} t e^{-t/\tau} dt$$

soit après calcul :

$$\langle t \rangle = \tau$$

Dans le modèle de Drude, la constante τ apparaissant dans la loi de type frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ correspond au temps moyen entre deux chocs.

9) On note dN_+ le nombre d'électrons qui traversent dans le sens $+\hat{u}_x$ une section droite de surface S située en x . Ces électrons se déplaçant à la vitesse $v \hat{u}_x$ étaient contenus dans le volume $dV = Sv dt$, à la densité particulière n . On a donc

$$dN_+ = \frac{1}{2} n S v dt$$

(le facteur $\frac{1}{2}$ venant du fait que un électrons sur deux à sa vitesse selon $+\hat{u}_x$)

Ces électrons ayant subi en moyenne leur dernier choc à l'instant $t - \tau$, ils ont été thermalisés (par les chocs) à la distance $x - v\tau$. Leur énergie est donc $\mathcal{E}(T(x - v\tau))$. L'énergie $d\mathcal{E}_+$ transportée par ces électrons dans le sens $+\hat{u}_x$ est :

$$d\mathcal{E}_+ = \frac{1}{2} n S v \mathcal{E}(T(x - v\tau)) dt$$

De même l'énergie transportée selon $+\hat{u}_x$ par les électrons qui traversent la surface S dans le sens $-\hat{u}_x$ vaut

$$d\mathcal{E}_- = -\frac{1}{2} n S v \mathcal{E}(T(x + v\tau)) dt$$

Finalement l'énergie totale qui traverse S vaut :

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_+ + d\mathcal{E}_- = \frac{1}{2} n S v \left(\mathcal{E}(T(x - v\tau)) - \mathcal{E}(T(x + v\tau)) \right) dt$$

Avec j_q vérifiant $d\mathcal{E} = j_q S dt$, on a bien

$$j_q = \frac{1}{2} n v \left(\mathcal{E}(T(x - v\tau)) - \mathcal{E}(T(x + v\tau)) \right)$$

10) En faisant l'hypothèse que τ est petit, ou de manière plus précise, que $v\tau$ est très inférieur à la longueur caractéristique de variation de la température, on a à l'ordre 1 :

$$\mathcal{E}(T(x - v\tau)) \approx \mathcal{E}(T(x)) - v\tau \frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

$$\mathcal{E}(T(x + v\tau)) \approx \mathcal{E}(T(x)) + v\tau \frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

$$\text{D'où } (\mathcal{E}(T(x - v\tau)) - \mathcal{E}(T(x + v\tau))) \approx -2v\tau \frac{d\mathcal{E}}{dx}$$

Avec $\mathcal{E}(T)$ et $T(x)$, on a par dérivation composée

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \frac{d\mathcal{E}}{dT} \frac{dT}{dx} = C_V \frac{dT}{dx}$$

Finalement,

$$j_q = -nv^2\tau C_V \frac{dT}{dx}$$

On retrouve une loi de type Fourier (à 1D) $\vec{j}_q = -\lambda \frac{dT}{dx} \hat{u}_x$, avec

$$\lambda = nv^2\tau C_V$$

11) A 1D, chaque électron possède une énergie cinétique microscopique mettant en jeu un seul degré de liberté, d'où :

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k_B T$$

$$C_V = \frac{1}{2}k_B$$

On en déduit

$$\lambda = \frac{1}{2} \frac{nk_B^2\tau}{m} T$$

12) On en déduit dans ce modèle 1D

$$\frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{1}{2} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2$$

A trois dimensions, on peut reprendre la même démarche en faisant les transpositions nécessaires.

On a un transport dans les trois directions de l'espace : $\vec{j}_q = j_{qx}\hat{u}_x + j_{qy}\hat{u}_y + j_{qz}\hat{u}_z$, avec $j_{qx} = -nv_x^2\tau C_V \frac{dT}{dx}$, $j_{qy} = -nv_y^2\tau C_V \frac{dT}{dy}$, $j_{qz} = -nv_z^2\tau C_V \frac{dT}{dz}$.

Le transport s'effectue de manière isotrope donc $v_x^2 = v_y^2 = v_z^2 = \frac{1}{3}v^2$ (vitesses quadratiques moyennes).

On a donc

$$\lambda = \frac{1}{3}nv^2\tau C_V$$

L'énergie cinétique met en jeu trois degrés de liberté donc

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

$$C_V = \frac{3}{2}k_B$$

On a donc à trois dimensions :

$$\lambda = \frac{3}{2} \frac{nk_B^2\tau}{m} T$$

et finalement

$$\frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{3}{2} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 = \kappa_{class}$$

13) En utilisant la relation issue de l'approche quantique pour C_V , on a

$$\frac{\lambda}{\gamma T} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi k_B}{e} \right)^2 = \kappa_{quant}$$

14) On a donc

$$\frac{\kappa_{class}}{\kappa_{quant}} = \frac{9}{2\pi^2} \approx 0,5$$

Les valeurs ont le même ordre de grandeur par les deux approches, mais restent assez différentes.

Avec $\epsilon_F \approx 1 \text{ eV} \approx 40 k_B T$, on a un comportement des électrons qui reste sensible à la quantification. On ne peut pas se limiter à un modèle classique.

15) Pour mesurer la masse volumique $\rho = m/V$, on peut pour un échantillon donné, déterminer m par pesée et V en plongeant l'échantillon dans un récipient plein d'eau à ras bord, et en mesurant ensuite le volume d'eau ayant débordé.

Pour le mesurer la capacité thermique massique c , on peut introduire, dans un calorimètre de capacité thermique C_{cal} connu contenant une masse m_1 d'eau à la température T_1 , une masse m_2 de cuivre à la température T_2 , et noter la température d'équilibre T_e . On a alors $(C_{cal} + m_1 c_e)(T_e - T_1) + m_2 c(T_e - T_2) = 0$.

16) Avec $T(x, t)$, on obtient l'équation usuelle de diffusion thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

avec $D = \lambda/\rho c$, coefficient de diffusion thermique.

17) $T(x, t) = f(x)g(t)$, on obtient $g'(t)f(x) = Dg(t)f''(x)$ soit :

$$\frac{g'}{g} = D \frac{f''}{f} \Leftrightarrow G(t) = DF(x)$$

avec $G = g'/g$ et $F = f''/f$.

Les variables x et t étant indépendantes, les fonction F et G sont nécessairement constantes, cette constante étant homogène à l'inverse d'un temps. On pose :

$$\frac{g'}{g} = D \frac{f''}{f} = C = \pm 1/\tau$$

Si $C = 1/\tau$, l'équation dur g devient $g' - \frac{1}{\tau}g = 0$, qui donne une solution divergente en $t \rightarrow \infty$. Ce cas est donc impossible.

On a donc forcément $C = -1/\tau$.

On en déduit $g' + \frac{1}{\tau}g = 0$, soit $g(t) = A_1 e^{-t/\tau}$.

Par ailleurs, on a $f'' + \frac{1}{D\tau}f = 0$. On peut poser $k = 1/\sqrt{D\tau}$, ce qui conduit à $f'' + k^2f = 0$, soit $f(x) = A_2 \cos kx + B_2 \sin kx$.

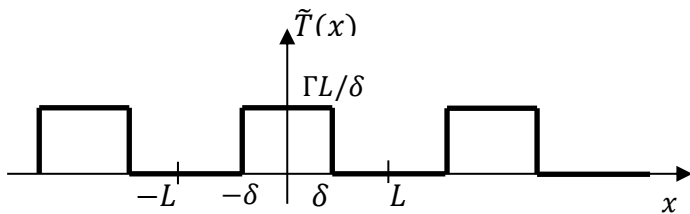
Finalement, en posant $A = A_1A_2$ et $B = A_1B_2$, on a la forme générale de la solution :

$$f(x)g(t) = e^{-t/\tau}(A \cos kx + B \sin kx)$$

avec $k = 1/\sqrt{D\tau}$.

18) On a en $t = 0$, $T(x, 0)$ qui est constante par morceaux pour $0 \leq x \leq L$, alors que la forme générale est du type $A \cos kx + B \sin kx$. L'équation de diffusion thermique étant linéaire, toute combinaison linéaire de solutions du type $A \cos kx + B \sin kx$ est aussi solution. Pour pouvoir écrire $T(x, 0)$ comme une combinaison linéaire de fonctions $A \cos kx + B \sin kx$, il faut rendre $T(x, 0)$ périodique et écrire son développement en série de Fourier (DSF).

19) Comme $T(0,0) = \Gamma L/\delta \neq 0$, on peut construire la fonction paire $\tilde{T}(x)$ de période spatiale $2L$ telle que $\tilde{T}(x) = T(x, 0)$ pour $0 \leq x < L$.



On a donc en utilisant le DSF, et en posant $k_n = n \frac{2\pi}{2L} = n \frac{\pi}{L}$:

$$T(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \cos(k_n x) + w_n \sin(k_n x)$$

On a donc pour chaque terme de la somme un temps caractéristique $\tau_n = \frac{1}{Dk_n^2}$.

En posant $\alpha_n = 1/\tau_n = n^2 D(\pi/L)^2$, on obtient finalement :

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha_n t} (u_n \cos(k_n x) + w_n \sin(k_n x))$$

La fonction $\tilde{T}(x)$ étant paire, elle se développe uniquement selon les termes en $\cos(k_n x)$, et donc $w_n = 0$. On a donc :

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n e^{-\alpha_n t} \cos(k_n x)$$

avec $k_n = n \pi/L$ et $\alpha_n = n^2 D(\pi/L)^2$.

20) On peut séparer le terme $n = 0$ des autres, soit

$$T(x, 0) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos(k_n x) = \tilde{T}(x)$$

En intégrant cette relation pour $0 \leq x \leq L$

$$\int_{x=0}^L \tilde{T}(x) dx = \int_{x=0}^L u_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \int_{x=0}^L \cos(k_n x) dx$$

Soit

$$\Gamma L = u_0 L + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{1}{k_n} \left[\sin \frac{n\pi}{L} x \right]_0^L$$

$$u_0 = \Gamma$$

Pour obtenir $u_n, n \neq 0$, on utilise l'aide donnée sur l'orthogonalité des fonction $\cos(k_n x)$:

$$\tilde{T}(x) = u_0 + \sum_{m=1}^{\infty} u_m \cos\left(m \frac{\pi}{L} x\right)$$

$$\tilde{T}(x) \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) = u_0 \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(m \frac{\pi}{L} x\right)$$

En intégrant de même :

$$\int_{x=0}^L \tilde{T}(x) \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx$$

$$= \int_{x=0}^L u_0 \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) dx$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} u_n \int_{x=0}^L \cos\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(m \frac{\pi}{L} x\right) dx$$

Or d'après l'aide :

$$\int_{x=0}^L \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) \cos\left(m\frac{\pi}{L}x\right) dx = \frac{L}{2} \delta_{nm}$$

par ailleurs :

$$\int_{x=0}^L \tilde{T}(x) \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) dx = \int_{x=0}^{\delta} \frac{\Gamma L}{\delta} \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) dx = \frac{\Gamma L}{\delta} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{L}\delta\right)}{n\frac{\pi}{L}}$$

et :

$$\int_{x=0}^L u_0 \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) dx = 0$$

Finalement, on obtient :

$$u_n = 2\Gamma \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{L}\delta\right)}{n\frac{\pi}{L}\delta}$$

Soit

$$T(x, t) = \Gamma \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{L}\delta\right)}{n\frac{\pi}{L}\delta} e^{-\alpha_n t} \cos(k_n x) \right)$$

21) En $x = L$, et en utilisant $\text{sinc}(x) = \sin x / x$, on a

$$T(L, t) = \Gamma \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{sinc}\left(n\frac{\pi}{L}\delta\right) e^{-\alpha_n t} \cos(n\pi) \right)$$

On a $\cos n\pi = (-1)^n$.

Dans la somme, le terme $e^{-\alpha_n t} = e^{-n^2 D(\pi/L)t}$ devient négligeable pour n grand (hormis pour $t = 0$), ce qui fait qu'on peut se limiter aux premières valeurs de n .

On a alors pour $\delta \ll L$, $n\frac{\pi}{L}\delta \ll \pi$ (si n n'est pas trop grand), et $\text{sinc}\left(n\frac{\pi}{L}\delta\right) \approx 1$.

On a donc

$$T(L, t) \approx \Gamma \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-\alpha_n t} \right) \approx \Gamma \xi(t)$$

22) Pour $t = t_{1/2}$, $\xi = 1/2$. On obtient par lecture $\alpha_1 t_{1/2} \approx 1,4$.

23) On observe une montée de température, puis une lente décroissance due probablement aux pertes thermiques négligées dans le modèle. En se restreignant aux instants avant cette décroissance, on peut déterminer $T_{Max} = 7$ (unités arbitraires), soit $T(L, t_{1/2}) = 7/2$. On a donc par lecture, en prenant l'origine des temps à l'émission du flash, $t_{1/2} = 12$ ms. On en déduit :

$$\frac{\lambda}{\rho c} \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t_{1/2} \approx 1,4$$

$$\lambda \approx \frac{\rho c}{t_{1/2}} \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \times 1,4$$

On a numériquement :

$$\lambda = 4,1 \times 10^2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

24) On peut calculer à $T = 300$ K :

$$\kappa_{exp} = \left(\frac{\lambda}{\gamma T}\right)_{exp} = 2,4 \times 10^{-8} \text{ (u. s. i)}$$

Que l'on peut comparer au résultat obtenu à la question 13

$$\kappa_{quant} = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi k_B}{e}\right)^2 = 2,5 \times 10^{-8} \text{ (u. s. i)}$$

Les résultats sont proches.