

Asservissement, rappels de 1^{ère} année

Compétences associées

B - Modéliser	B2.01	Identifier le comportement d'un système pour l'assimiler à un modèle canonique à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle
	B2.02	Établir un modèle de comportement à partir de relevés expérimentaux
	B2.03	Établir le schéma-bloc du système
	B2.04	Déterminer les fonctions de transfert du système en boucle ouverte et en boucle fermée
	B2.05	Justifier la nécessité d'un asservissement
D - Résoudre	B2.63	Justifier une simplification du modèle
	C.11	Déterminer à partir d'un schéma-bloc ou d'une fonction de transfert les grandeurs caractérisant les performances du modèle
	C.12	Tracer une réponse temporelle ou fréquentielle

1	Systèmes automatisés et SLCI.....	3
1.1	Types de systèmes automatisés	3
1.2	Structure d'un système asservi	4
1.3	Notion de SLCI	5
1.4	Critères de performance.....	5
1.4.1	Stabilité.....	5
1.4.2	Précision.....	5
1.4.3	Rapidité.....	6
1.4.4	Amortissement	7
2	Représentation des SLCI	7
2.1	Modélisation mathématique par équations différentielles.....	7
2.2	Passage dans le domaine de Laplace.....	8
2.3	Transformées de Laplace usuelles	10
2.4	Simplification de schémas-blocs.....	11
2.4.1	Blocs en série.....	11
2.4.2	Blocs en parallèle.....	11
2.4.3	Déplacement de sommateurs	11
2.4.4	Alternance de sommateurs.....	11
2.4.5	Système à plusieurs entrées : Principe de superposition	11
2.4.6	Simplification de la représentation générique d'une boucle fermée	12
2.5	Exemple : Étude du rotor d'un drone.....	12
3	Fonctions de transfert du 1 ^{er} et 2 nd ordre	15
3.1	Fonction de transfert du 1 ^{er} ordre.....	15
3.2	Fonction de transfert du 2 nd ordre	16
3.2.1	Démarche d'identification d'une fonction de transfert sur une réponse indicielle	16
3.2.2	Identification d'un second ordre avec $\xi \geq 1$ sur une réponse indicielle.....	17
3.2.3	Identification d'un second ordre avec $\xi < 1$ sur une réponse indicielle.....	17
3.3	Exemples d'identifications	19



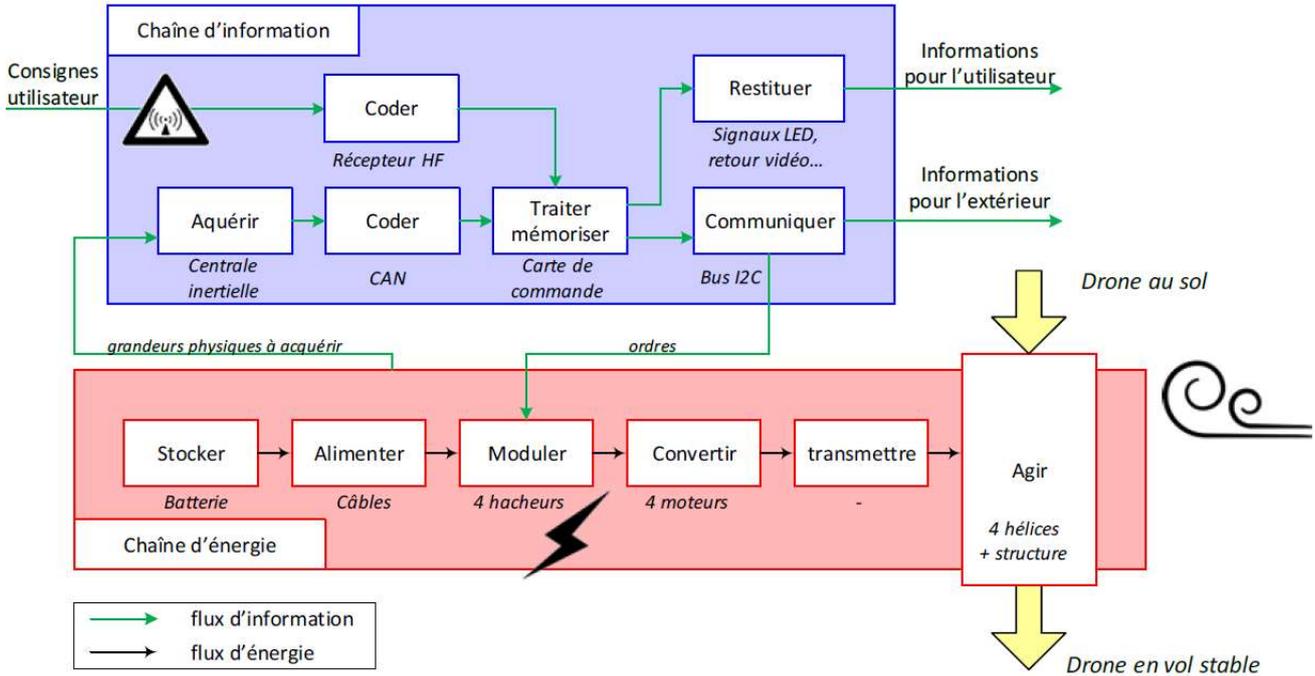
4	Analyse fréquentielle des SLCI	20
4.1	Intérêt de l'étude fréquentielle.....	20
4.2	Fonction de transfert isochrone (ou complexe).....	20
4.3	Représentation d'une fonction de transfert.....	21
4.4	Réponse fréquentielle d'un 1 ^{er} ordre	21
4.5	Réponse fréquentielle d'un 2 nd ordre.....	22
4.6	Réponse fréquentielle d'une fonction de transfert quelconque.....	23
5	Annexe : Décomposition en éléments simples.....	25
5.1	Exemple.....	25
5.2	Formulation générale	25
6	Exercices	27
6.1	Réponses temporelles	27
6.2	Réponses fréquentielles	28

Introduction

La structure classique d'un système automatisé fait intervenir une chaîne d'énergie et une chaîne d'information qui interagissent pour garantir des performances du système.



Exemple de la phase de vol d'un drone :

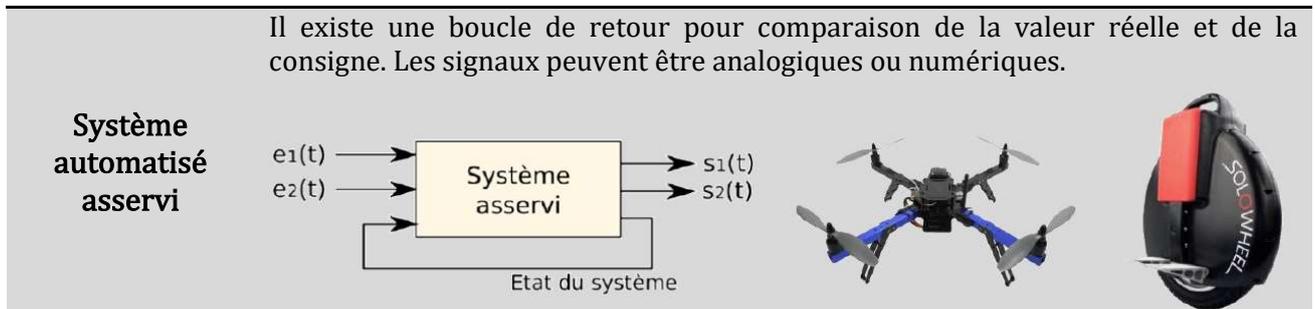


Il peut exister des perturbations qui doivent autant que possible être prises en compte dans le modèle. Dans cet exemple, on peut citer les perturbations électromagnétiques au niveau des signaux de commande ou de la chaîne de puissance, ou le vent qui agit comme une perturbation aérodynamique sur le vol du drone.

⇒ La commande du système doit être mise au point grâce à une modélisation de sa chaîne d'énergie – chaîne d'information sous la forme d'un Système Linéaire Continu Invariant (SLCI). Elle modélisera le comportement des composants réels, en se basant sur des hypothèses (qui doivent rester réalistes). On pourra ainsi anticiper le comportement du système, et ainsi parfaire les choix de conception.

1 Systèmes automatisés et SLCI

1.1 Types de systèmes automatisés



Système à logique combinatoire

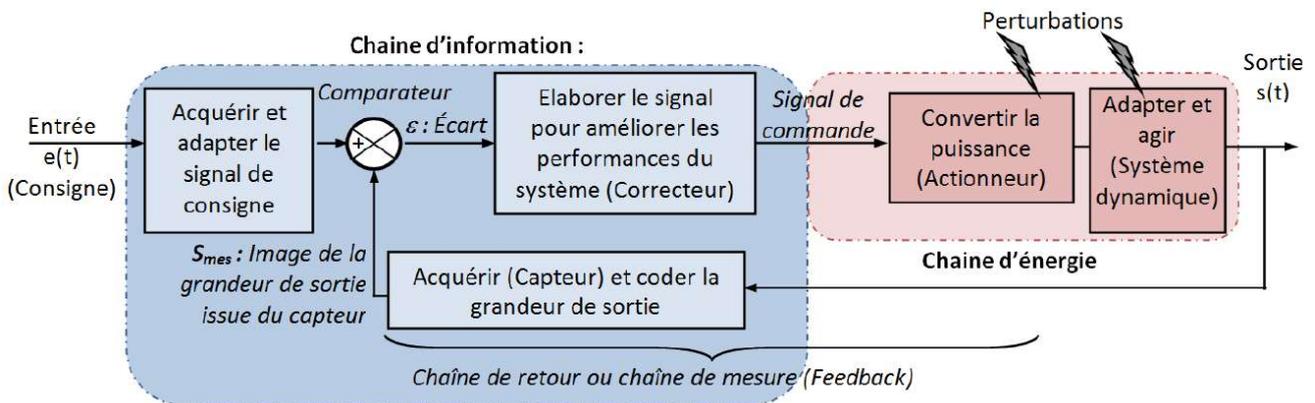
N'utilise aucun mécanisme de mémorisation (ils n'ont pas de mémoire). Les grandeurs de sortie s'expriment comme une combinaison directe des grandeurs d'entrée.

Système à logique séquentielle

Mémorise l'état précédent. Les grandeurs de sortie s'expriment comme une combinaison des grandeurs d'entrée ET de l'état précédent des grandeurs d'entrée et de sortie (mémoire).

1.2 Structure d'un système asservi

Un système asservi possède obligatoirement une boucle de retour (Feedback) :



Cette boucle de retour fait nécessairement intervenir un capteur, qui renvoie un signal qui est comparé à la consigne. Le plus souvent, le capteur renvoie un signal électrique, mais il peut également, dans certains systèmes asservis, renvoyer une pression, un mouvement mécanique...

Dans la modélisation sous la forme d'un Système Linéaire Continu Invariant, les signaux sont nécessairement TOUS analogiques. Le schéma de la page suivante présente la structure d'un système à asservissement numérique. Pour le modéliser, il faudra faire des hypothèses sur les effets des conversions analogique numérique (CAN) et numérique analogique (CNA).

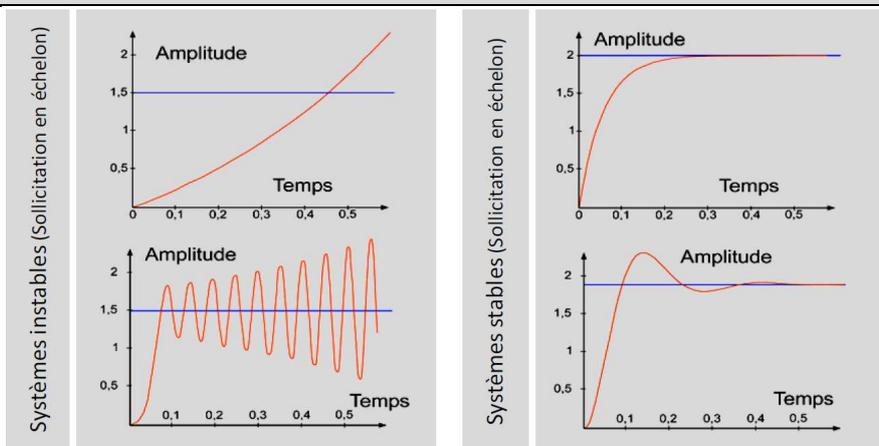
1.3 Notion de SLCI

<p>Système linéaire continu invariant (SLCI)</p>	<p>Un SLCI est :</p> <ul style="list-style-type: none"> - linéaire : On linéarise le comportement du système autour d'un point de fonctionnement. - continu : Les variations des grandeurs physiques sont définies à chaque instant (elles sont caractérisées par des fonctions continues). On parle aussi dans ce cas de système analogique. <p style="text-align: center;">La modélisation d'un système numérique ne rentre donc pas dans le cadre des SLCI.</p> <ul style="list-style-type: none"> - invariant : Les caractéristiques du système (masse, dimensions, résistance, impédance, ...) ne varient pas au cours du temps. Le comportement du système ne change pas au cours du temps (« le système ne vieillit pas »). 	
---	---	--

1.4 Critères de performance

1.4.1 Stabilité

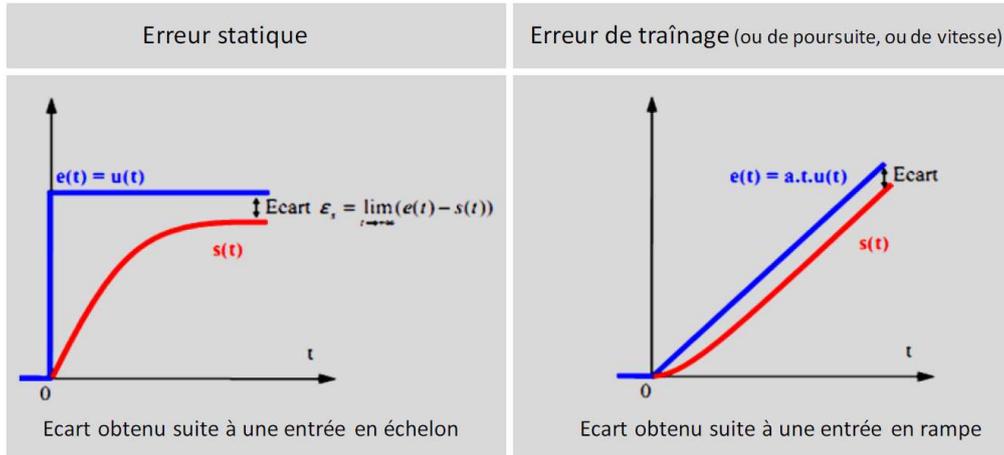
Stabilité Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.



1.4.2 Précision

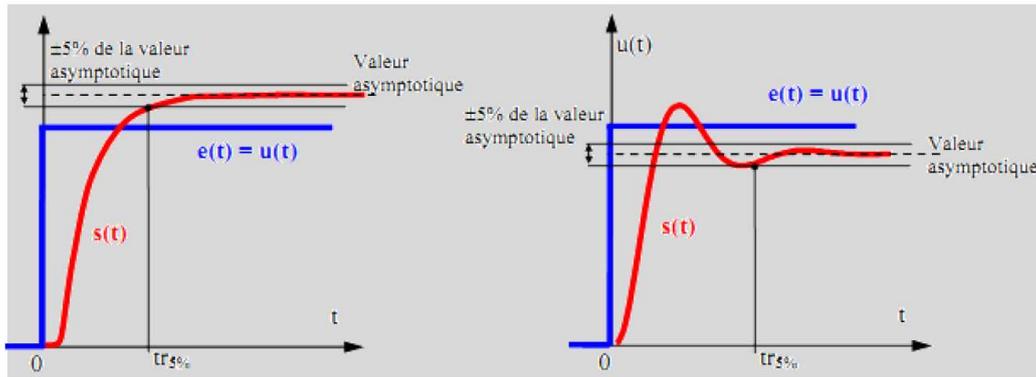
Précision Un système est précis s'il est **apte à atteindre la valeur de consigne**. La précision est caractérisée par l'écart (ou erreur) entre la consigne et la valeur effectivement atteinte en sortie.

L'écart est exprimé dans la même unité que la grandeur de sortie.



1.4.3 Rapidité

Rapidité La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée. La valeur finale est le plus souvent atteinte de manière asymptotique. On retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, le **temps de réponse à 5%**.



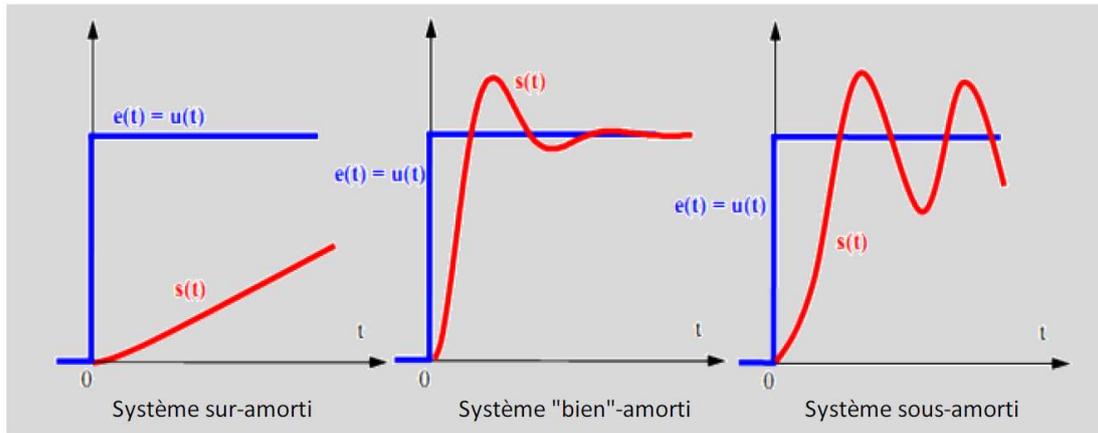
En régime oscillatoire amorti, le temps de réponse à 5% correspond à l'instant auquel la courbe rentre dans la zone à $\pm 5\%$ de la valeur asymptotique pour ne plus en sortir (voir exemples ci-dessus).

1.4.4 Amortissement

Amortissement

L'amortissement est caractérisé par le rapport entre les amplitudes successives des oscillations de la sortie, s'il existe des oscillations en sortie.

Plus ces oscillations s'atténuent rapidement, plus le système est amorti.



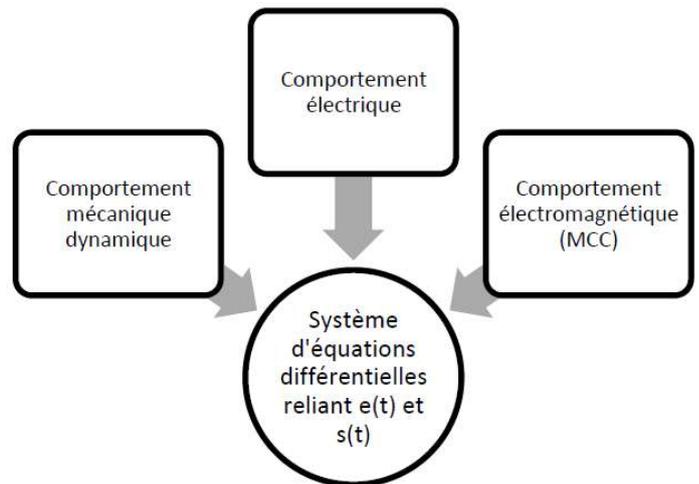
2 Représentation des SLCI

2.1 Modélisation mathématique par équations différentielles

On commence par mettre en équation le comportement des différents sous-systèmes composant le système global. Pour cela, il est nécessaire de formuler des hypothèses et de mettre en place une modélisation.

On obtient ainsi une équation globale reliant l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$ du système étudié.

On se limitera dans ce cours aux systèmes à une entrée et une sortie, mais le raisonnement peut être appliqué à des systèmes plus complexes.

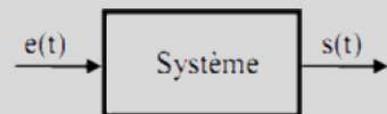


Par combinaison des différentes équations différentielles issues des modèles de comportement des sous-systèmes élémentaires, on obtient une équation différentielle caractéristique du système :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t)$$

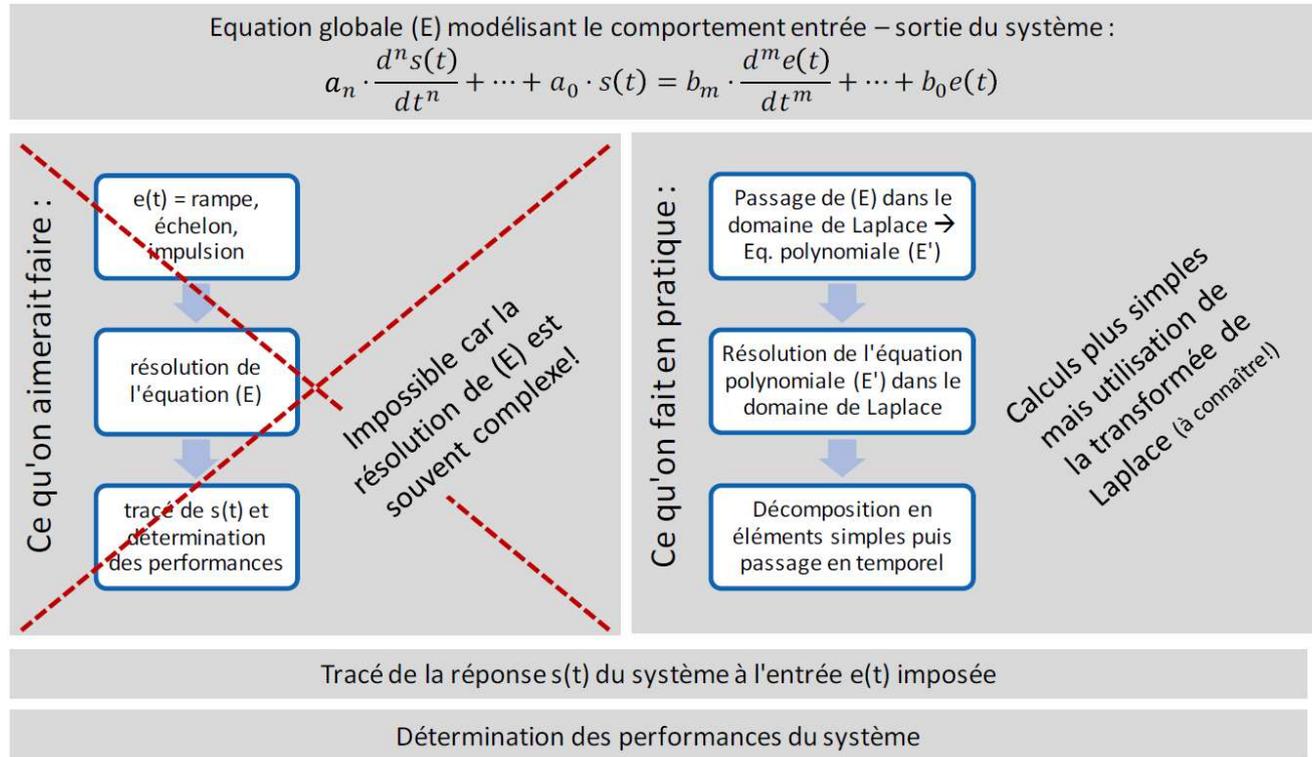
n est l'**ordre** du système.

$n \geq m$ car le système est causal : la sortie est uniquement dépendante des entrées passées ou présentes, et pas des entrées futures (l'effet ne peut pas précéder la cause...).



2.2 Passage dans le domaine de Laplace

Le diagramme ci-dessous présente la stratégie de résolution du problème. Dans l'idéal, on souhaiterait résoudre l'équation différentielle dans le domaine temporel, ce qui est souvent trop complexe. Pour la résoudre, on passe donc dans le domaine de Laplace, on résout le problème, puis on repasse le résultat dans le domaine temporel.



Rappels sur la transformée de Laplace :

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, telle que $f(t) = 0$ pour $t < 0$ est :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-p t} dt$$

où p est une variable complexe.

Transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$

L'utilisation de cette expression permet de passer du domaine temporel (variable en t) au domaine symbolique de Laplace (variable en p ou s). En pratique, on ne s'en servira jamais, car on dispose de tables de transformées de Laplace types.

$F(p)$ est l'image de $f(t)$ dans le domaine de Laplace.

La transformée de Laplace satisfait les conditions d'unicité et de linéarité.

On note :

- en minuscules les fonctions dans le domaine temporel : $f(t)$;
- en majuscules les fonctions dans le domaine de Laplace : $F(p)$.

Transformées de Laplace d'entrées $e(t)$ usuelles :

Échelon d'amplitude a :

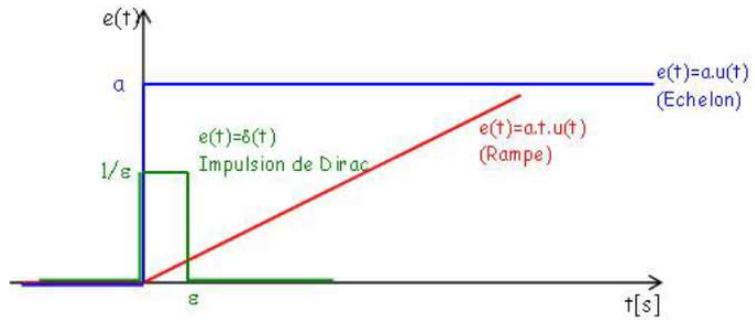
$$e(t) = a \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{a}{p}$$

Impulsion unitaire de Dirac :

$$e(t) = \delta(t) \Rightarrow E(p) = 1$$

Rampe de pente a :

$$e(t) = a \cdot t \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \frac{a}{p^2}$$



Dériver par rapport à t dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine symbolique dans les conditions de Heaviside (conditions initiales nulles).

Transformée de la dérivée

Dans des conditions générales :

$$\mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = p \cdot F(p) - f(0^+)$$

Et $\mathcal{L} \left[\frac{d^2f(t)}{dt^2} \right] = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0^+) - f'(0^+)$ avec F la transformée de Laplace de f .

Dans les conditions de Heaviside, intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine de Laplace.

Transformée de l'intégrale

Dans des conditions générales :

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(u) du \right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{f(0^+)}{p}$$

Théorème de la valeur initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p)$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$$

Théorème du retard

Si $g(t) = f(t - T)$ ($g(t)$ est la fonction $f(t)$ retardée de T)

Alors $G(p) = e^{-Tp} \cdot F(p)$ où e^{-Tp} correspond à l'opérateur retard

Reprenons l'équation (E) caractéristique du comportement du système :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t)$$

Equation (E') dans le domaine de Laplace :

$$a_n \cdot p^n \cdot S(p) + \dots + a_0 \cdot S(p) = b_m \cdot p^m \cdot E(p) + \dots + b_0 \cdot E(p)$$

$$\Leftrightarrow (a_n \cdot p^n + \dots + a_0) S(p) = (b_m \cdot p^m + \dots + b_0) E(p)$$

Passage dans le domaine de Laplace avec conditions initiales nulles

Fonction de transfert $H(p)$ du système (ou transmittance)

C'est la fraction entre sortie $S(p)$ et entrée $E(p)$ dans le domaine de Laplace :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + \dots + b_0}{a_n \cdot p^n + \dots + a_0}$$

Dans le domaine de Laplace, on peut alors écrire :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

Forme canonique d'une fonction de transfert :

Une fonction de transfert peut toujours se mettre sous forme canonique, c'est-à-dire sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K(1 + \dots + b_m \cdot p^m)}{p^\alpha(1 + \dots + a_n \cdot p^{n-\alpha})}$$

α : **classe du système** (représente le nombre d'intégrations pures dans le système)

n : **ordre du système**, identique à l'ordre de l'équation différentielle

K : **gain statique** (unité de K = unité de $s(t)$ /unité de $e(t)$)

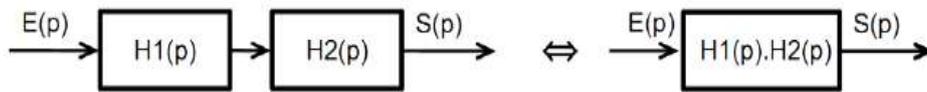
2.3 Transformées de Laplace usuelles

Le tableau des transformées de Laplace usuelles ci-dessous est donné pour des fonctions temporelles causales (nulles pour $t < 0$). Il permet le passage du domaine temporel au domaine de Laplace ou inversement.

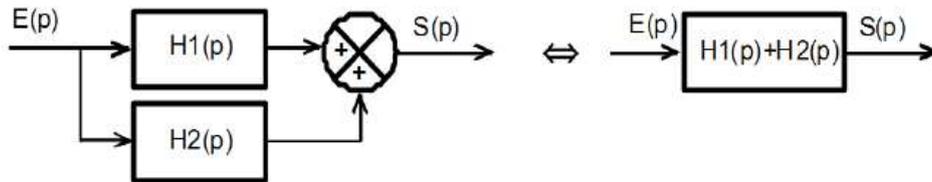
Domaine temporel	Domaine de Laplace	Domaine temporel	Domaine de Laplace
$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$K \cdot u(t)$	$\frac{K}{p}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$K \cdot t$	$\frac{K}{p^2}$	$sh \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$ch \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$e^{-at} \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$1 - e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$e^{-at} \cdot \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cdot t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$		
$1 - (1+at)e^{-a \cdot t}$	$\frac{a^2}{p \cdot (p+a)^2}$	$e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$t - \frac{1-e^{-a \cdot t}}{a}$	$\frac{a}{p^2(p+a)}$	$1 + \frac{b}{a-b} \cdot e^{-a \cdot t} - \frac{a}{a-b} \cdot e^{-b \cdot t}$	$\frac{a \cdot b}{p \cdot (p+a) \cdot (p+b)}$

2.4 Simplification de schémas-blocs

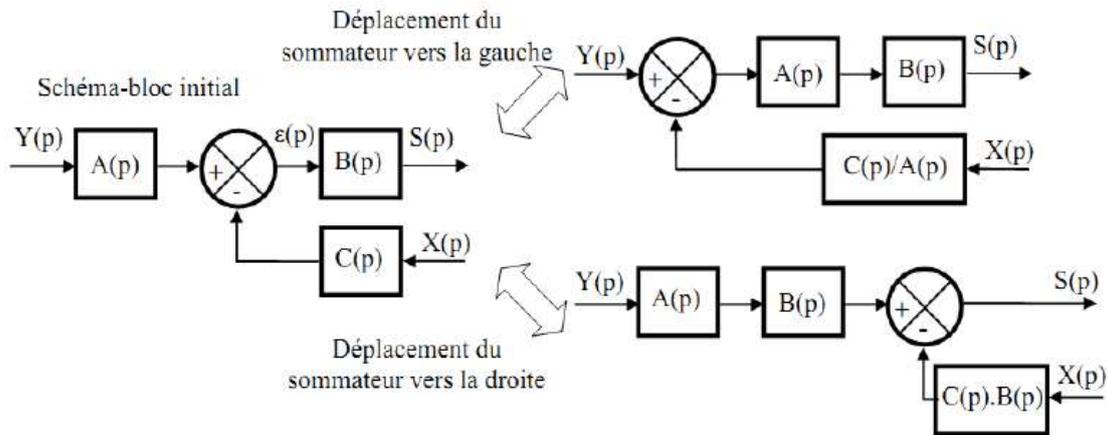
2.4.1 Blocs en série



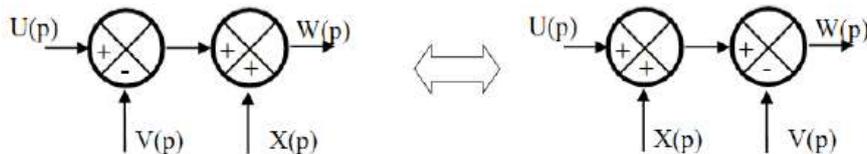
2.4.2 Blocs en parallèle



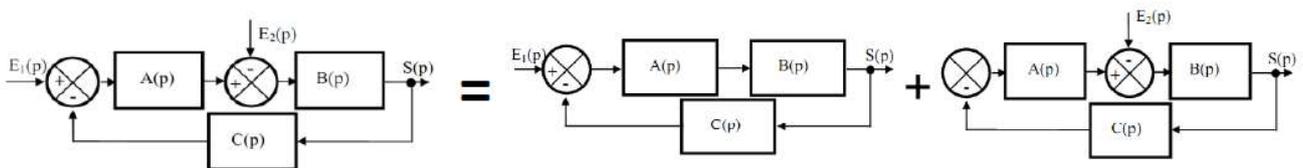
2.4.3 Déplacement de sommateurs



2.4.4 Alternance de sommateurs

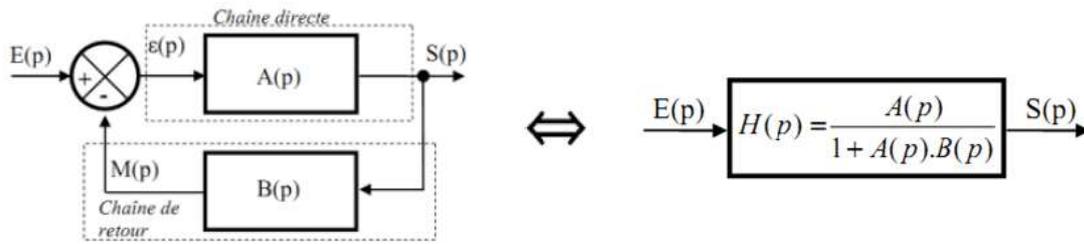


2.4.5 Système à plusieurs entrées : Principe de superposition



Et on peut alors écrire $S(p)$ sous la forme : $S(p) = H(p).E_1(p) + G(p).E_2(p)$

2.4.6 Simplification de la représentation générique d'une boucle fermée



Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) pour la chaîne générique :

$$FTBF(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} \quad FTBF \Rightarrow \text{On prend en compte sortie/entrée}$$

L'analyse de la FTBF servira à étudier la réponse temporelle du système.

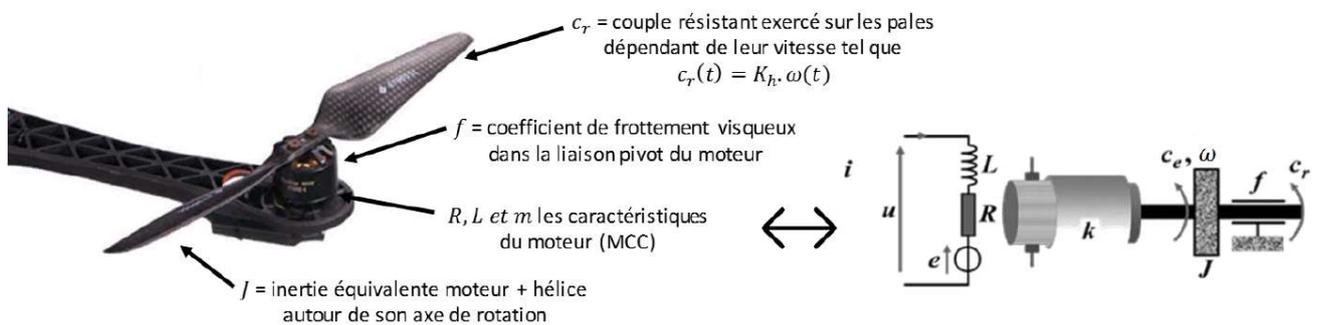
Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) pour la chaîne générique :

$$FTBO(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = A(p)B(p)$$

FTBO \Rightarrow On prend en compte le signal en fin de chaîne de retour / la sortie du comparateur.

L'analyse de la FTBO servira souvent à étudier les performances d'un système asservi.

2.5 Exemple : Étude du rotor d'un drone



On s'intéresse ici uniquement à la conversion énergie électrique \rightarrow énergie mécanique.

Attention, ce système {moteur + pale} n'est pas un système asservi, même si on verra dans le schéma-bloc qu'il comporte une boucle de retour, liée au comportement électromécanique du moteur électrique.

Nous allons utiliser deux méthodes différentes pour établir la fonction de transfert du système $H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}$ du système, reliant la vitesse de rotation du rotor à la tension d'entrée imposée au moteur.

Méthode n°1 : Ecriture du système d'équations associées à la modélisation dans le domaine de Laplace

Commençons par modéliser les différents sous-systèmes en écrivant leurs équations caractéristiques :

- Comportement des composants électriques : $u = R i \text{ et } u_L = L \frac{di}{dt}$
- Loi des mailles : $u_L = u - u_R - e$
- Comportement de la MCC : $e = m \omega$
($m =$ constante de couple de la MCC) $c_e = m i$
- Équation de la dynamique : $c_e - c_r - f \omega = J \frac{d\omega}{dt}$
- Comportement de l'hélice (frottement visqueux) : $c_r = K_h \omega$

Si l'on regroupe les équations obtenues, on obtient le système suivant, qui est difficile à résoudre dans le domaine temporel.

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = u - R i - m \omega \\ m i - (K_h + f) \omega = J \frac{d\omega}{dt} \end{cases}$$

Passage dans le domaine de Laplace (conditions initiales nulles) :

$$\begin{cases} L.p.I(p) = U(p) - R.I(p) - m.\Omega(p) \\ m.I(p) - (K_h + f)\Omega(p) = J.p.\Omega(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L.p.I(p) = U(p) - R.I(p) - m.\Omega(p) \\ I(p) = \frac{J.p + K_h + f}{m} \Omega(p) \end{cases}$$

Et, en regroupant les deux équations précédentes :

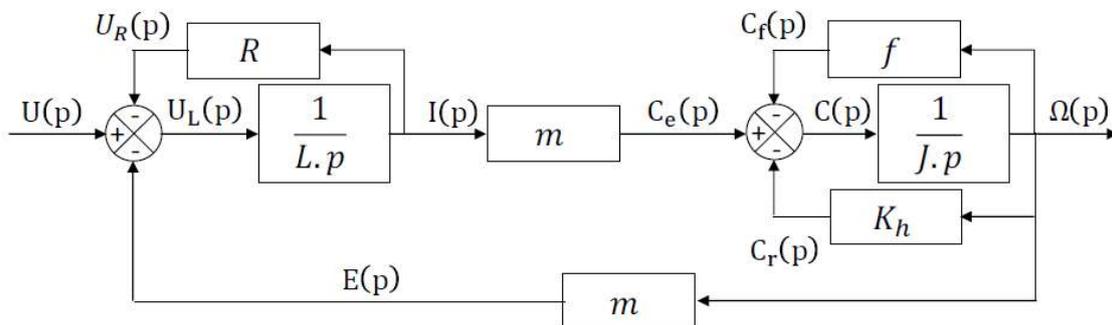
$$\left((L.p + R) \left(\frac{J.p + K_h + f}{m} \right) + m \right) \Omega(p) = U(p) \Rightarrow H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{m}{(J.p + K_h + f)(L.p + R) + m^2}$$

On a obtenu la fonction de transfert. On peut ensuite imposer une entrée $U(p)$ (échelon par exemple), puis repasser dans le domaine temporel pour trouver $\omega(t)$.

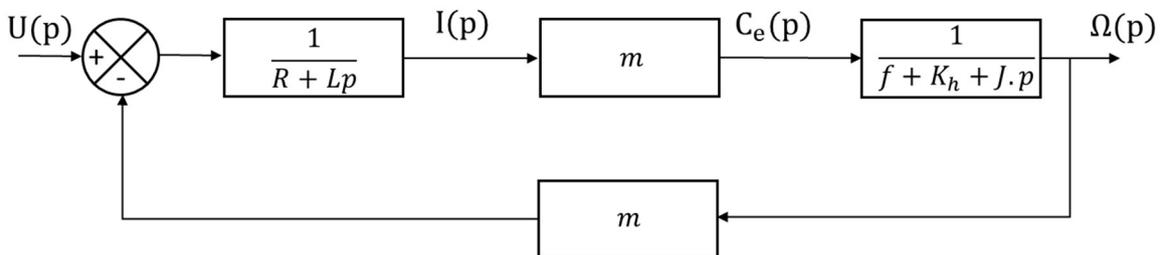
Méthode n°2 : Construction d'un schéma-bloc, et simplification

Cette méthode est à privilégier, car plus rapide.

Le schéma-bloc associé à l'ensemble des équations formulées sur la page précédente est le suivant (on peut le construire à partir des équations) :



En simplifiant le schéma-bloc successivement, on aboutit à :



Puis on retrouve la même fonction de transfert que celle obtenue précédemment avec la 1^{ère} méthode :

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{m}{(J.p + K_h + f)(L.p + R) + m^2}$$

Mise sous forme canonique de la fonction de transfert précédente :

On commence par mettre le dénominateur sous la forme d'un polynôme en p (ou d'un produit de polynômes en p) :

$$H(p) = \frac{m}{JLp^2 + p(L(K_h + f) + RJ) + R(K_h + f) + m^2}$$

Puis on met le dénominateur (ou ses différents termes polynomiaux) sous forme canonique en $1 + \dots$:

$$H(p) = \frac{\frac{m}{R(K_h + f) + m^2}}{1 + \frac{(L(K_h + f) + RJ)}{R(K_h + f) + m^2}p + \frac{JL}{R(K_h + f) + m^2}p^2}$$

Rappel : formes canoniques des fonctions de transfert des 1^{er} et 2nd ordres

1^{er} ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$$

2nd ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

si le dénominateur n'admet pas de racines réelles

si le dénominateur admet deux racines réelles τ_1 et τ_2

Dans le cas de notre exemple, dans quel cas est-on avec $H(p)$ (dénominateur à racines réelles ou non ?)

⇒ On peut procéder par développement + identification du dénominateur

Pour cela, on développe par exemple le dénominateur sous forme canonique $(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)$ et on l'identifie.

La fonction de transfert $H(p)$ peut donc se mettre sous la forme canonique suivante :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_e p)(1 + \tau_m p)} \text{ avec } K = \frac{m}{R(K_h + f) + m^2} \quad \tau_e = \frac{L}{R} \frac{R(K_h + f)}{R(K_h + f) + m^2} \quad \tau_m = \frac{R}{R(K_h + f) + m^2}$$

Dans le cas présent :

- La constante de temps τ_e peut être appelée « constante de temps électrique » car elle dépend majoritairement des caractéristiques électriques du moteur (R, L).
- La constante de temps τ_m peut être appelée « constante de temps mécanique » car elle dépend majoritairement des caractéristiques mécaniques du système (J, K_h, f).

Souvent, la constante de temps électrique τ_e sera négligeable devant la constante de temps mécanique τ_m :

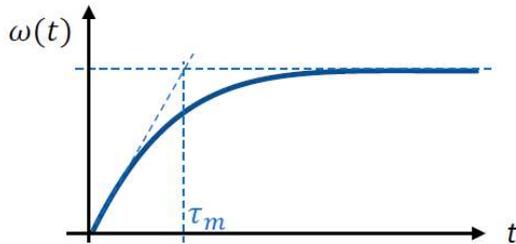
$$\tau_e \ll \tau_m \Rightarrow H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} \approx \frac{K}{1 + \tau_m p}$$

On dit que τ_m est un **pôle dominant**, et le **comportement du système se rapporte alors à un système du premier ordre**.

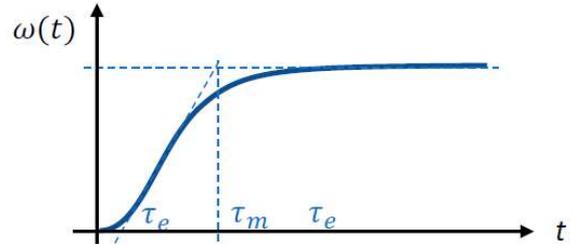
Interprétation : Les retards introduits par le comportement électrique du système (bobinage du moteur) sont négligeables devant ceux introduits par le comportement mécanique (inertie, frottements).

Allures des réponses temporelles à des consignes en échelon $U(p) = \frac{1}{p}$:

Cas $\tau_e \ll \tau_m$ (τ_e négligeable) :



Cas τ_e non négligeable devant τ_m :



3 Fonctions de transfert du 1^{er} et 2nd ordre

3.1 Fonction de transfert du 1^{er} ordre

Un système physique est du 1^{er} ordre si son entrée $e(t)$ et sa sortie $s(t)$ sont liées par une équation différentielle du 1^{er} ordre à coefficients constants :

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Système du premier ordre

avec K le gain statique du système ([unité de sortie] / [unité d'entrée]) ;
 τ la constante de temps du système ([temps]).

Dans les conditions de Heaviside, la fonction de transfert du système s'écrit dans le domaine de Laplace comme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$$

Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre : (= réponse à un échelon)

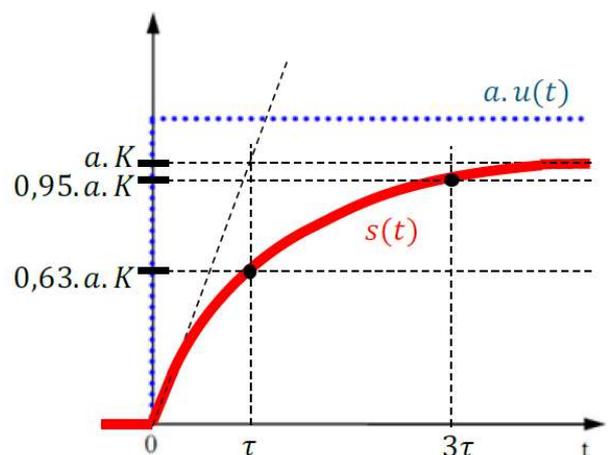
$e(t) = a u(t)$ (échelon d'amplitude a)

$s(t) = a K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) u(t)$

On peut identifier une fonction de transfert du premier ordre sur sa réponse indicielle :

- K à partir de la valeur asymptotique
- τ à partir de la tangente à l'origine, ou des 63% ou 95% de la valeur asymptotique (voir ci-contre)

Le temps de réponse à 5% est 3τ .



3.2 Fonction de transfert du 2nd ordre

Un système physique est du 2nd ordre si son entrée $e(t)$ et sa sortie $s(t)$ sont liées par une équation différentielle du 2nd ordre à coefficients constants :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

avec K le gain statique du système ([unité de sortie] / [unité d'entrée]) ;

ξ (ou z) le facteur d'amortissement du système ([sans unité]) ;

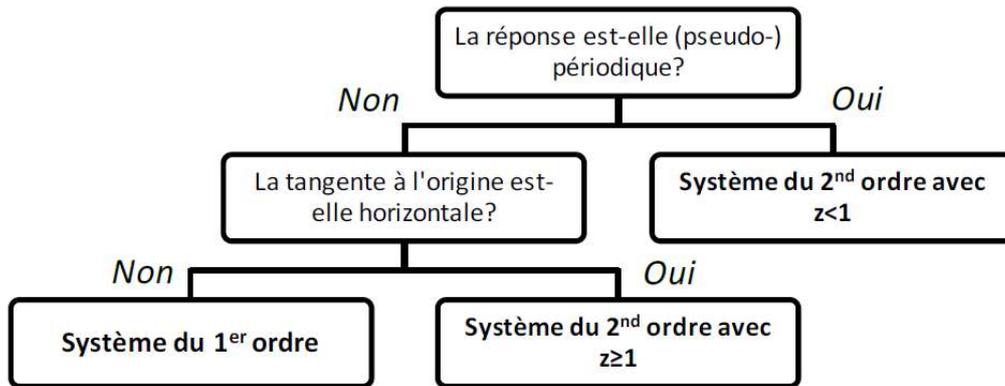
ω_0 la pulsation propre non amortie du système ([rad/s]).

La fonction de transfert du système s'écrit dans le domaine de Laplace comme :

Système du second ordre

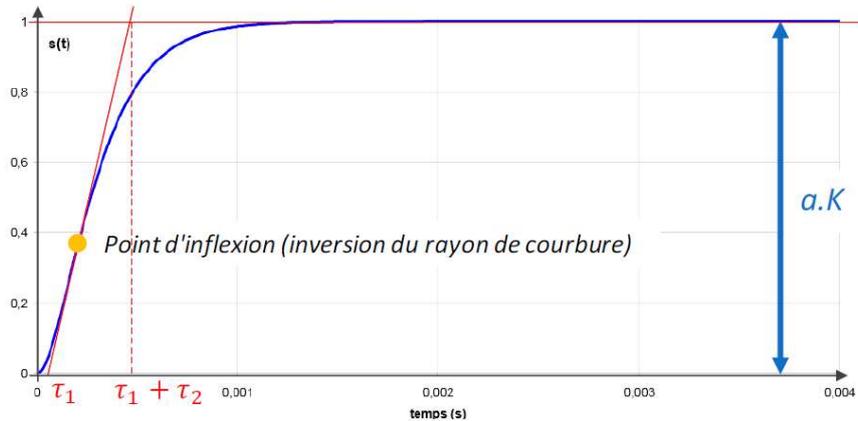
$0 < z < \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} < z < 1$	$1 < z$
Le dénominateur de la FT admet 2 racines complexes		Le dénominateur de la FT admet 2 racines réelles
$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2}$		$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}$
<p>Régime pseudo-périodique</p> <p>Réponse indicielle</p> <p>1^{er} dépassement > 5% 1^{er} dépassement < 5%</p>		<p>Régime apériodique</p> <p>Pas de dépassement</p>

3.2.1 Démarche d'identification d'une fonction de transfert sur une réponse indicielle



3.2.2 Identification d'un second ordre avec $\xi \geq 1$ sur une réponse indicielle

L'entrée est ici un échelon $e(t) = a u(t)$, c'est pourquoi on parle de réponse indicielle.

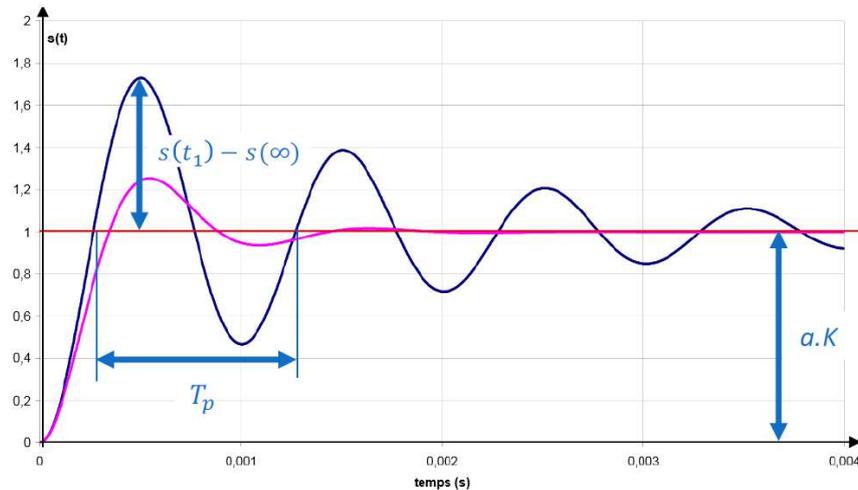


$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$$

- K est déterminé à partir de la valeur asymptotique.
- τ_1 et τ_2 sont déterminés par tracé de la tangente à $s(t)$ au point d'inflexion, et intersections avec l'axe des abscisses et avec la droite asymptotique de $s(t)$.

3.2.3 Identification d'un second ordre avec $\xi < 1$ sur une réponse indicielle

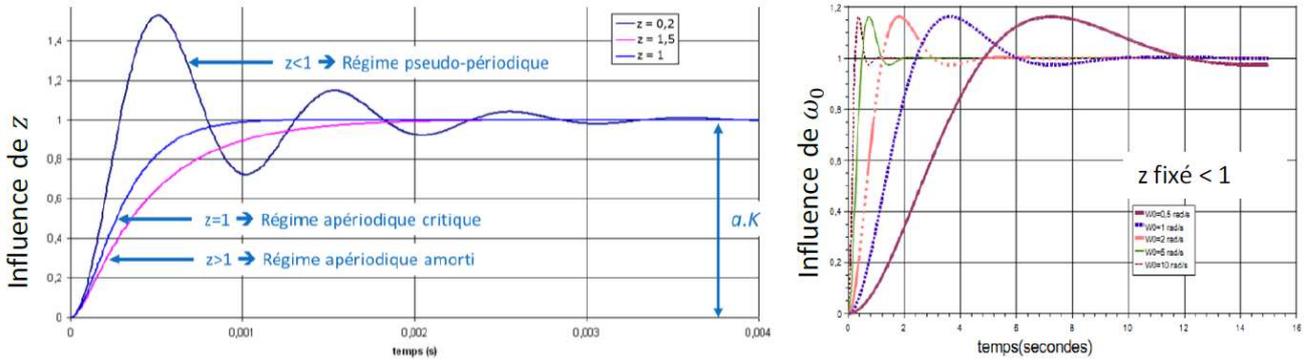
L'entrée est toujours un échelon $e(t) = a u(t)$.



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

- K est déterminé à partir de la valeur asymptotique.
- Détermination du dépassement : $D_n = \left| \frac{s(t_1) - s(\infty)}{s(\infty) - s(0)} \right| = e^{\frac{-n\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$
 $\Rightarrow \xi$ est obtenu à partir de cette formule ou d'un abaque (voir page suivante).
- Détermination de ω_0 à partir de ω_p : $\omega_p = \frac{2\pi}{T_p} = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$

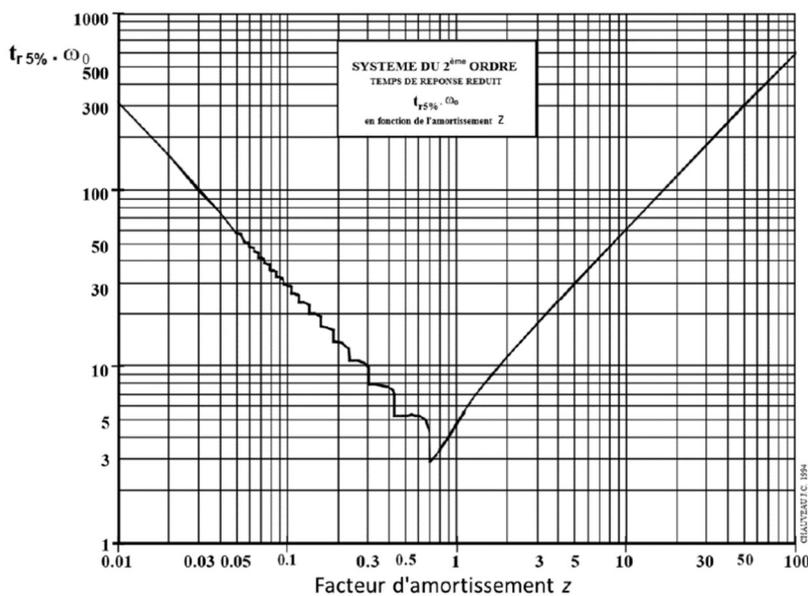
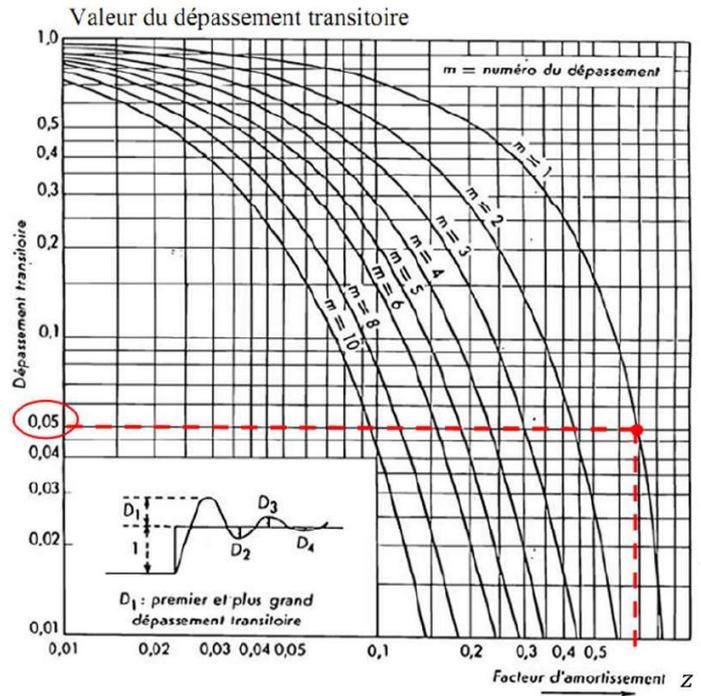
Influence de l'amortissement ξ et de la pulsation propre ω_0 sur la réponse temporelle :



Abaques pouvant aider à l'identification d'un second ordre avec $\xi < 1$:

Abaque des dépassements relatifs

Pour l'utiliser, on détermine le dépassement relatif transitoire ($= \frac{D_1}{\text{valeur asymptotique}}$) sur la réponse temporelle, puis on utilise l'abaque et (la plupart du temps) sa courbe $m = 1$ associée au premier dépassement, pour déterminer le coefficient d'amortissement ξ .

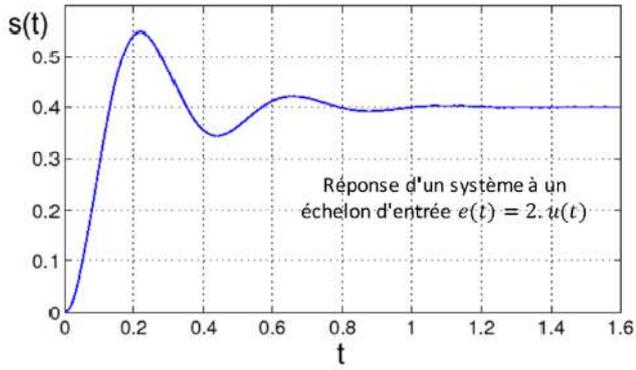


Abaque du temps de réponse réduit

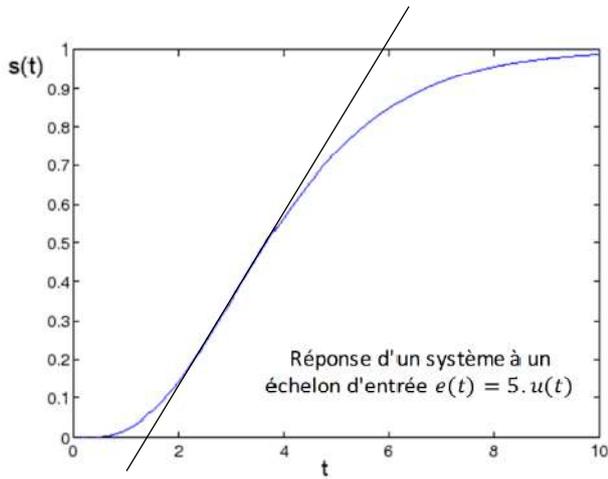
Pour l'utiliser, une fois le coefficient d'amortissement déterminé grâce à l'abaque précédent, on détermine sur la réponse temporelle du système son temps de réponse à 5%, et on utilise l'abaque du temps de réponse réduit pour déterminer le produit $tr_{5\%} \cdot \omega_0$.

3.3 Exemples d'identifications

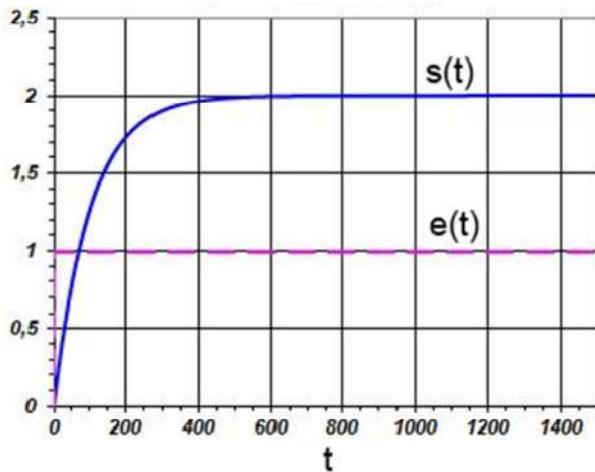
Identifier les fonctions de transfert associées aux réponses indicielles suivantes :



$$\begin{cases} K = 0,2 \\ \xi = 0,3 \\ \omega_0 = 15 \text{ rad/s} \end{cases}$$



$$\begin{cases} K = 0,2 \\ \tau_1 = 1,4 \text{ s} \\ \tau_2 = 4,6 \text{ s} \end{cases}$$



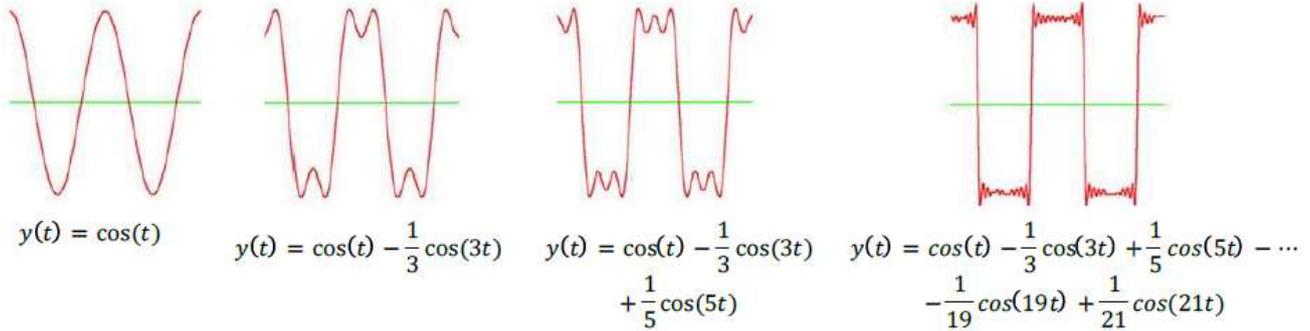
$$\begin{cases} K = 2 \\ \tau = 200 \text{ s} \end{cases}$$

4 Analyse fréquentielle des SLCI

4.1 Intérêt de l'étude fréquentielle

On peut assimiler un signal quelconque à une somme de fonctions sinusoïdales. C'est le principe de la décomposition en série de Fourier :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos k\omega_0 t + b_k \sin k\omega_0 t)$$



Les SLCI ayant un comportement linéaire, on peut appliquer le principe de superposition pour obtenir la réponse d'un système à une consigne en créneau par exemple. On remarque sur la figure ci-dessus que ce signal créneau peut être obtenu en sommant plusieurs signaux sinusoïdaux de fréquences différentes.

Pour parvenir à la réponse temporelle du système, il faut donc pour commencer connaître la réponse d'un système à des excitations sinusoïdales simples à différentes fréquences. C'est le principe de l'étude fréquentielle d'un système.

Réponse fréquentielle ou réponse harmonique d'un système	C'est la réponse du système, en régime permanent sinusoïdal , lorsqu'il est soumis à une entrée sinusoïdale dont on fait varier la fréquence. Par décomposition en série de Fourier, on peut retrouver par exemple la sortie associée à une entrée périodique en créneau.
---	--

4.2 Fonction de transfert isochrone (ou complexe)

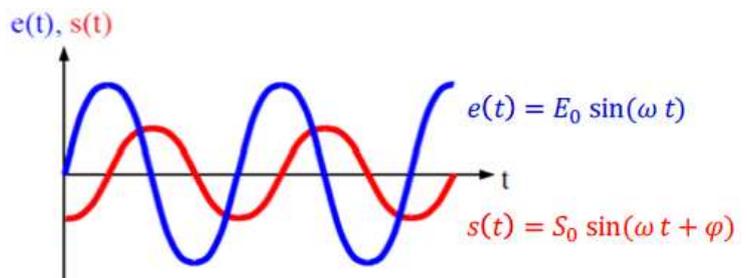
Si l'entrée d'un SLCI est sinusoïdale en régime permanent, sa sortie est nécessairement sinusoïdale et de même fréquence. On caractérise donc pour une fréquence donnée $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

Gain du système

$$G(\omega) = \frac{S_0}{E_0} \text{ (rapport des amplitudes)}$$

Déphasage du système

$$(\omega) = \varphi \text{ (aussi appelé phase)}$$



En fréquentiel, on s'intéresse uniquement au régime établi (jamais au régime transitoire).

Fonction de transfert isochrone

$H(j\omega)$

On définit la fonction de transfert isochrone dans le plan complexe $H(j\omega)$ avec j la variable complexe et ω la pulsation associée à la fréquence de l'entrée (et de la sortie).

Alors : $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\varphi}$

- le gain est donné par : $G(\omega) = \frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)|$

- le déphasage est donné par : $\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(H(j\omega))}{\text{Re}(H(j\omega))}\right)$

En pratique, pour obtenir $(j\omega)$, on remplace p par $j\omega$ dans la fonction de transfert $H(p)$.

4.3 Représentation d'une fonction de transfert

Représentation du gain et de la phase

On représente sur des graphiques les évolutions du gain et de la phase de $(j\omega)$.

- Pour le gain, on représente le gain en décibels (dB) :

$G_{dB} = 20 \log|H(j\omega)|$ intérêt : gain=0 lorsqu'il n'y a pas d'amplification

- Pour la phase, on représente directement la phase φ

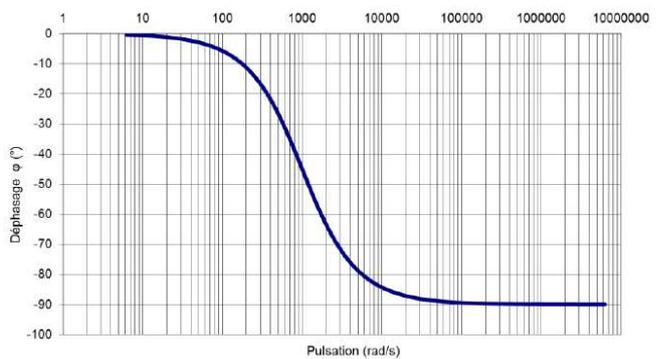
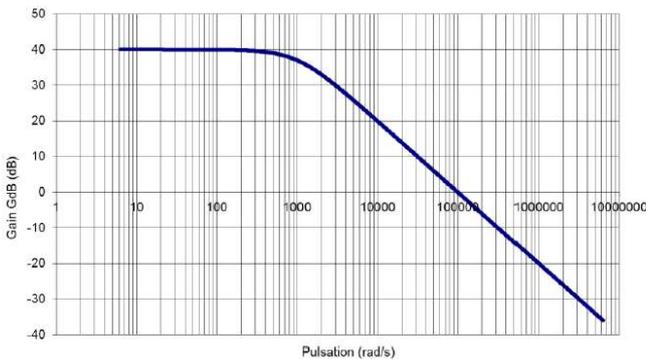
Diagramme de Bode

Un diagramme de Bode est composé de deux graphes composés de :

- la pulsation ω en abscisse, graduée en échelle log (décades) ;

- le gain G_{dB} et le déphasage φ en ordonnées, sur deux courbes séparées.

Exemple de diagramme de Bode pour une FT du premier ordre $H(j\omega) = \frac{100}{1+0.001j\omega}$



4.4 Réponse fréquentielle d'un 1^{er} ordre

Soit une fonction de transfert du premier ordre $H(p) = \frac{K}{1+\tau j\omega}$

Calculons gain et phase de cette fonction de transfert :

$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left| \frac{K}{1 + \tau j\omega} \right| = 20 \left(\log K - \log \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2} \right)$

$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{K}{1 + \tau j\omega}\right) = -\arg(1 + \tau j\omega) = -\arctan(\tau\omega)$

Approximons maintenant le comportement aux basses et hautes fréquences :

- En basse fréquence, $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB}(\omega) = 20 \log K$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = 0$$
- À $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$

$$G_{dB}(\omega_c) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log K - 3 \text{ dB}$$

$$\varphi(\omega_c) = -\frac{\pi}{4} = -45^\circ$$
- En haute fréquence, $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{dB}(\omega) = 20 \log K - 10 \log(\tau^2 \omega^2) = 20(\log K - \log(\tau \omega))$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$$

On peut, à partir de ces approximations, tracer les diagrammes de Bode (ou de Black) asymptotiques, ainsi que les allures des diagrammes réels.

4.5 Réponse fréquentielle d'un 2nd ordre

Soit une fonction de transfert du second ordre pouvant s'écrire sous la forme $H(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}j}$

Calculons gain et phase de cette fonction de transfert :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \left(\log K - \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2} \right)$$

$$\varphi(\omega) = \arg \left(\frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi\omega}{\omega_0}j} \right) = -\arctan \left(\frac{2\xi\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)$$

Approximons maintenant le comportement aux basses et hautes fréquences :

- En basse fréquence, $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB}(\omega) = 20 \log K$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = 0$$
- À $\omega = \omega_0$

$$G_{dB}(\omega_c) = 20 \log K - 20 \log 2\xi$$

si $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$, il y a résonance en $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$

si $\xi > \frac{\sqrt{2}}{2}$, il n'y a pas résonance

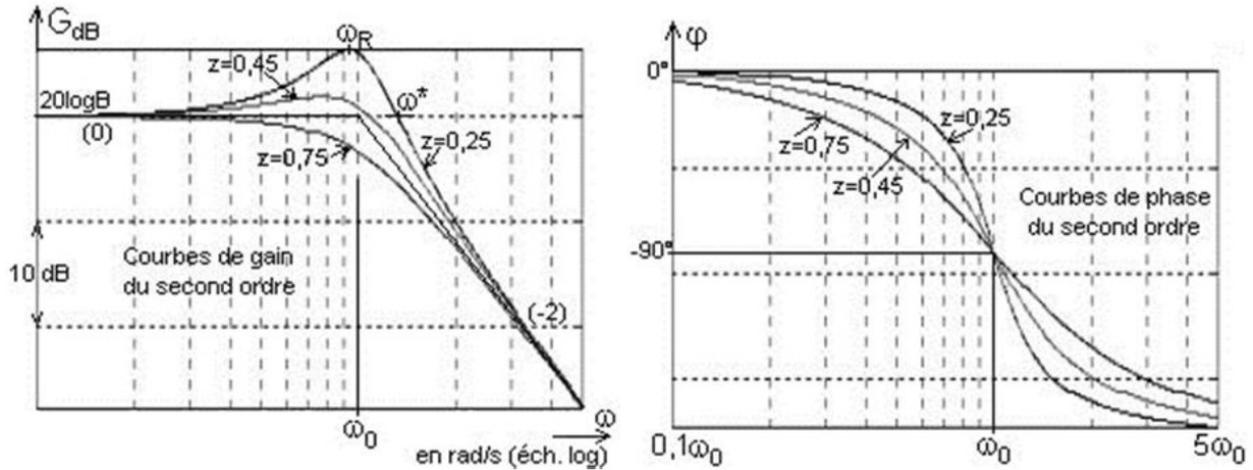
$$\varphi(\omega_c) = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$$
- En haute fréquence, $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G_{dB}(\omega) = 20 \log(K\omega_0^2) - 40 \log(\omega)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = -\pi = -180^\circ$$

On peut, à partir de ces approximations, tracer les diagrammes de Bode (ou de Black) asymptotiques, ainsi que les allures des diagrammes réels. On note que le diagramme asymptotique d'une fonction du second ordre a toujours la même forme, mais que la courbe de gain peut faire apparaître une résonance ou non selon la valeur du coefficient d'amortissement ξ (par rapport à la valeur critique $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$).

Allures des diagrammes de Bode d'une fonction du second ordre pour différentes valeurs de ξ :



4.6 Réponse fréquentielle d'une fonction de transfert quelconque

Si une fonction de transfert quelconque peut se mettre sous la forme d'un produit de fonctions de transfert simples (ce qui est le cas la plupart du temps) :

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

Alors :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log|H_1(j\omega)| + 20 \log|H_2(j\omega)|$$

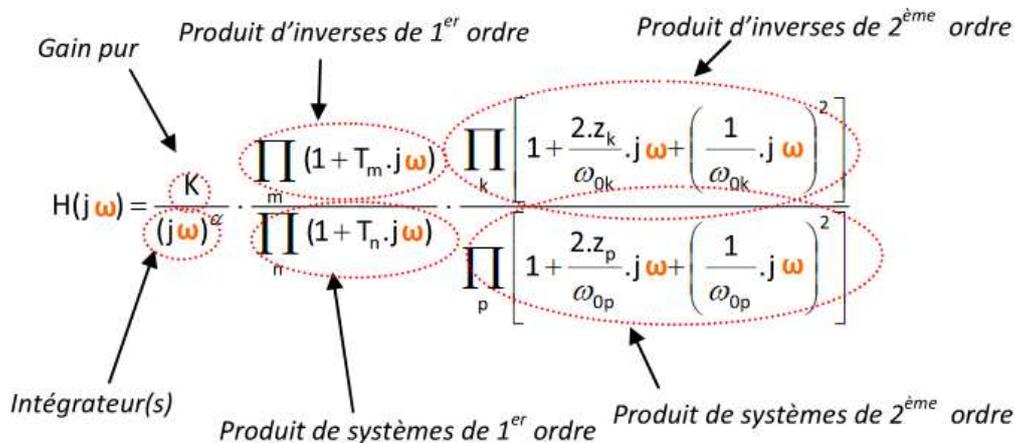
$$\varphi(\omega) = \arg(H_1(j\omega)) + \arg(H_2(j\omega))$$

Si une fonction de transfert peut être décomposée en un produit de fonctions de transfert élémentaires ($H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$), les gains et phases des fonctions de transfert élémentaires peuvent être sommés :

$$G_{dB}^H(j\omega) = G_{dB}^{H_1}(j\omega) + G_{dB}^{H_2}(j\omega)$$

$$\varphi_H(j\omega) = \varphi_{H_1}(j\omega) + \varphi_{H_2}(j\omega)$$

En cas d'étude d'une fonction de transfert quelconque, on met la fonction de transfert isochrone sous la forme d'un produit de fonctions de transfert de premiers et seconds ordres, et on se reporte au tracé des diagrammes asymptotiques des fonctions connues.

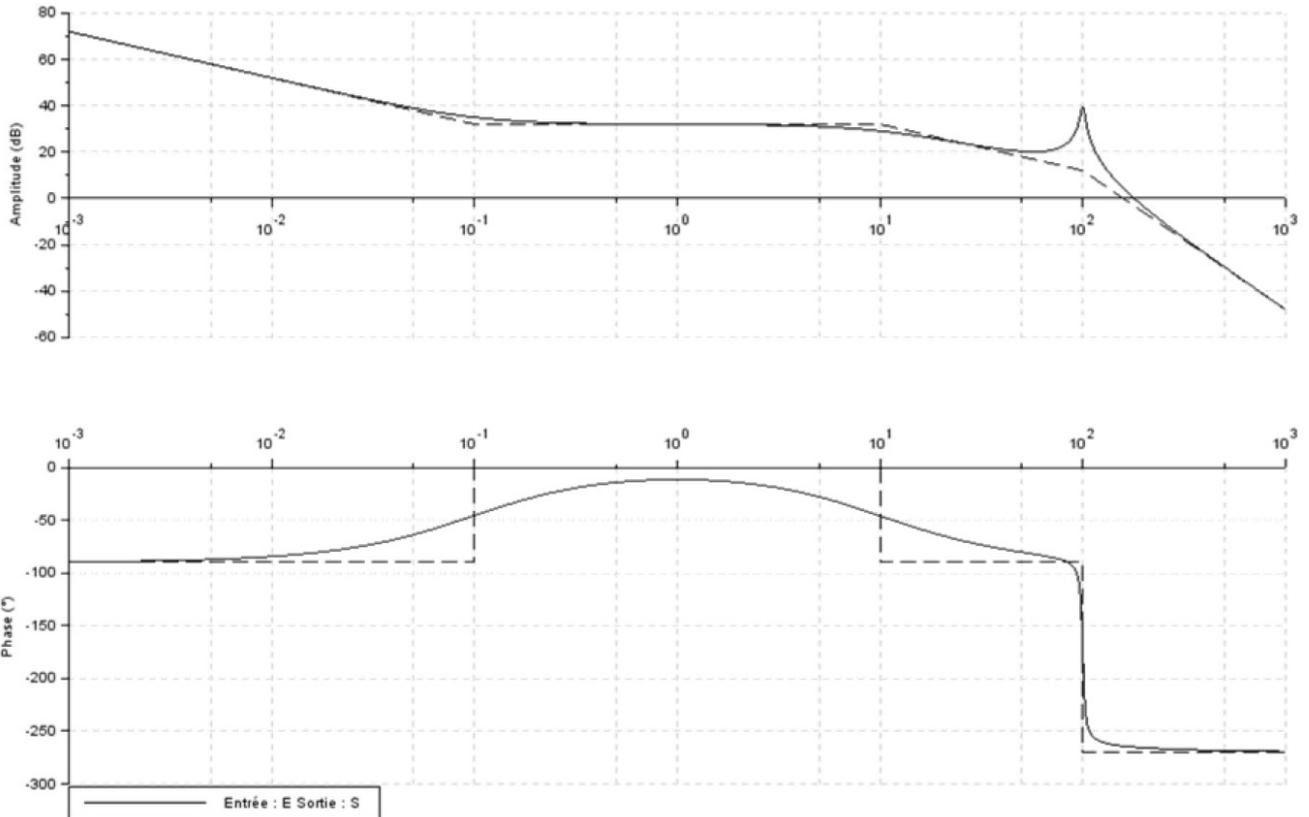


Tracer le diagramme de Bode asymptotique de la fonction de transfert (p) suivante :

$$H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot H_3(p) \cdot H_4(p)$$

$$H_1(p) = \frac{4}{p} ; H_2(p) = 1 + 10p ; H_3(p) = \frac{1}{1 + 0,1p} ; H_4(p) = \frac{1}{1 + 4 \cdot 10^{-4}p + 10^{-4}p^2}$$

Pour effectuer le tracé, on trace les diagrammes de Bode des différentes fonctions élémentaires, puis on les somme.



5 Annexe : Décomposition en éléments simples

Objectif : Rechercher la fonction temporelle (t) correspondant à $F(p)$

5.1 Exemple

Si la fonction à transformer ne figure pas directement dans la table des transformées usuelles, il faut décomposer la fonction en éléments simples, qui figureront quant à eux dans la table des transformées usuelles :

$$F(p) = \frac{p + 2}{(p + 5)(p + 10)} = \frac{A}{(p + 5)} + \frac{B}{(p + 10)}$$

Transformée inverse inconnue Transformées inverses connues

Il reste à identifier A et B (par développement + identification) :

$$A = -\frac{3}{5} \text{ et } B = \frac{8}{5}$$

À partir des transformées inverses connues, on retrouve alors la transformée inverse :

$$f(t) = -\frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{8}{5}e^{-10t}$$

5.2 Formulation générale

Soit une fraction rationnelle du type $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$

avec $N(p)$ et $D(p)$ deux polynômes n'ayant aucune racine commune et tels que :

$$\text{degré}(N(p)) < \text{degré}(D(p))$$

Les **pôles** sont les racines du dénominateur $D(p)$.

Les **zéros** sont les racines du numérateur $N(p)$.

Le numérateur $N(p)$ sera un produit de polynômes de degrés ≤ 2 .

La fraction rationnelle $F(p)$ peut être décomposée en éléments simples. La décomposition se fait différemment selon que les pôles p_i sont :

- des pôles réels simples ($\Delta > 0$ dans une équation du 2nd ordre)
- des pôles réels multiples ($\Delta = 0$ dans une équation du 2nd ordre)
- des pôles complexes ($\Delta < 0$ dans une équation du 2nd ordre)

Pôles réels simples :

Avec des pôles réels simples p_i (p_1, p_2, \dots, p_n) et $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$, la fraction rationnelle se met sous la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

Elle peut alors se décomposer comme suit, avec $\alpha_i \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$

$$F(p) = K + \frac{\alpha_1}{p - p_1} + \frac{\alpha_2}{p - p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{p - p_n}$$

Il reste ensuite à calculer les termes K et α_i :

Méthode	<ol style="list-style-type: none"> 1. Calcul de α_i : <ol style="list-style-type: none"> a. On multiplie les deux formes de $F(p)$ par $(p - p_i)$. b. On pose $p = p_i$. c. On détermine α_i. d. On réalise l'opération n fois (avec $n = \deg(D(p))$). 2. Calcul de K : <ol style="list-style-type: none"> a. Pour les deux formes de $F(p)$ on calcule $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p)$. b. On détermine K.
----------------	---

Pôles réels multiples :

Avec des pôles réels multiples p_1 , la fraction rationnelle se met sous la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1)^n}$$

Elle peut alors se décomposer comme suit, avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$

$$F(p) = \frac{\alpha_1}{p - p_1} + \frac{\alpha_2}{(p - p_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{(p - p_1)^n}$$

Il reste ensuite à calculer les termes α_i :

Méthode	<p>Les méthodes précédentes restent utilisables. Elles ne permettent pas de déterminer tous les α_i. On peut alors mettre les deux formes de $F(p)$ au même dénominateur et identifier les monômes. On peut aussi prendre des valeurs particulières de p et résoudre un système d'équations. Le calcul de certaines limites en ∞ peut permettre de déterminer certains coefficients.</p>
----------------	--

Pôles complexes et réels :

Avec un pôle complexe associé à $(ap^2 + bp + c)$ (et un pôle réel simple p_1 dans l'exemple donné), la fraction rationnelle se met sous la forme :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1)(ap^2 + bp + c)}$$

Elle peut alors se décomposer comme suit, avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$

$$F(p) = \frac{\alpha_1}{p - p_1} + \frac{\alpha_2 + \alpha_3 p}{ap^2 + bp + c}$$

Il reste ensuite à calculer les termes α_i :

Méthode	<p>Les méthodes précédentes restent utilisables. Elles ne permettent pas de déterminer tous les α_i. On peut alors mettre les deux formes de $F(p)$ au même dénominateur et identifier les monômes. On peut aussi prendre des valeurs particulières de p et résoudre un système d'équations. Le calcul de certaines limites en ∞ peut permettre de déterminer certains coefficients.</p>
----------------	--

6 Exercices

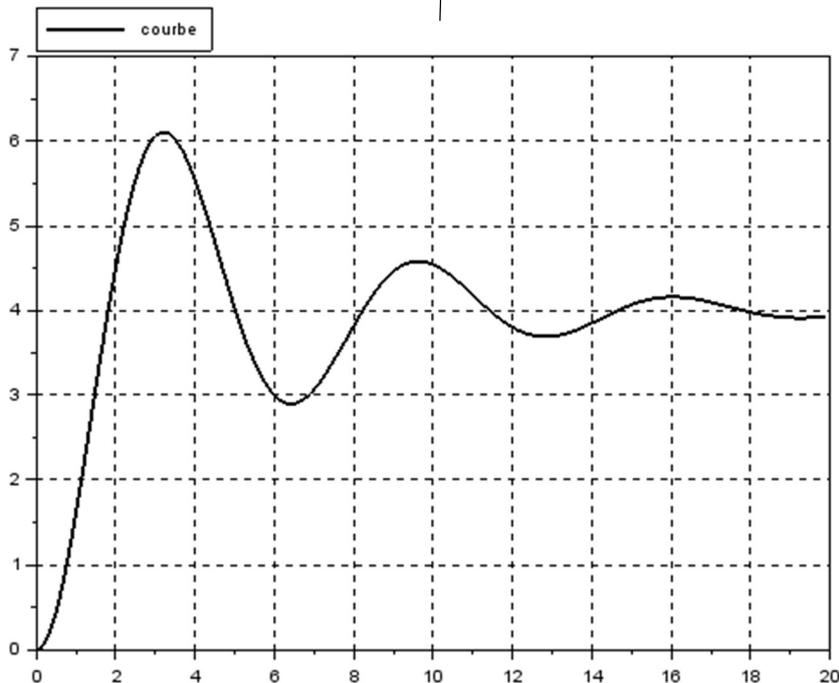
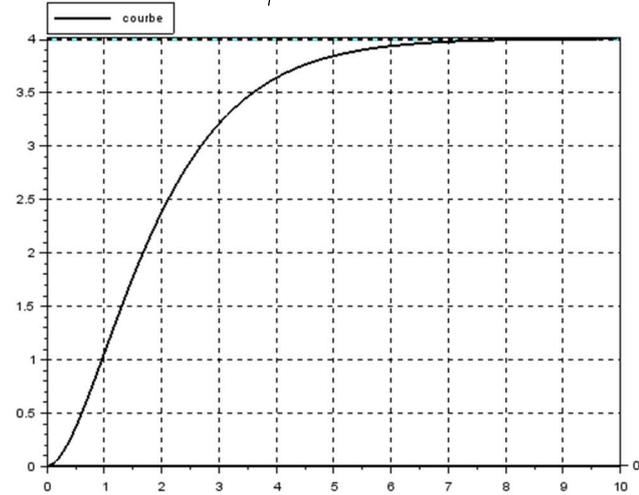
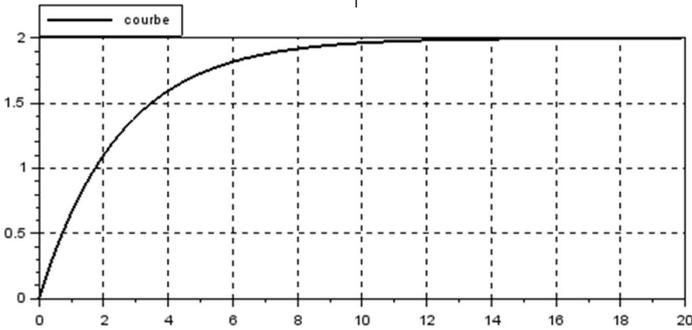
6.1 Réponses temporelles

Tracer les réponses temporelles à un échelon $e(t) = 2 \cdot u(t)$ des systèmes associés aux fonctions de transfert suivantes.

$$H_1(p) = \frac{2}{2 + 5p}$$

$$H_2(p) = \frac{2}{1 + 0,4p + p^2}$$

$$H_3(p) = \frac{2}{1 + 2p + p^2}$$



6.2 Réponses fréquentielles

Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques et réels (allures) des systèmes associés aux fonctions de transfert suivantes.

$$H_1(p) = \frac{220}{22 + 13p + p^2}$$

$$H_2(p) = \frac{220}{p(1 + 0,1p)}$$

$$H_3(p) = \frac{0,5}{1 + 0,5p}$$

