Révisions 15

Exercice 1 Pression de radiation

On s'intéresse à la réflexion d'une onde électromagnétique (plane et monochromatique, polarisée rectilignement) sur un conducteur parfait (en incidence normale). On rappelle les relations de passage entre deux milieux, $\vec{n}_{12}$ étant un vecteur unitaire orthogonal à l'interface dirigé du milieu 1 vers le milieu 2 :

$$\vec{n}_{12}.(\vec{E_2} - \vec{E_1}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{n}_{12}.(\vec{B_2} - \vec{B_1}) = 0$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E_2} - \vec{E_1}) = 0$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B_2} - \vec{B_1}) = \mu_0 \vec{j}_s$$

1. Exprimer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ réfléchis, en déduire le courant de surface sur le conducteur.
2. Expliquer l'origine physique de la pression de radiation.
3. Montrer que son expression est $p = \varepsilon_0 E_0^2$ où E_0 est l'amplitude du champ électrique incident.
4. Retrouver cette expression via un modèle corpusculaire de l'onde incidente.

Exercice 2 Marées

1. Expliquer la périodicité semi-diurne des marées.

2. On donne les masses de la lune et du soleil $M_L = 7,35.10^{22}\ kg$ et $M_S = 2.10^{30}\ kg$ ainsi que les distances terre lune et terre soleil en vitesse lumière, respectivement $1,25\ s$ et $500 s$. Evaluer l'importance relative des contributions de la lune et du soleil sur les marées.

Exercice 3 Modèle d'Einstein

Le modèle d'einstein consiste à considérer un solide comportant N atomes comme N oscillateurs harmoniques à 3 dimensions. On rappelle que, en physique quantique, les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique $1D$ sont donnés par :

$$E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$$

1. Montrer que ce modèle prévoit l'effondrement de la capacité thermique à basse température
2. Retrouver, pour les hautes températures, la loi de dulong et petit.

Exercice 4 Pendule de Foucault

Le pendule de foucault, installé pour la première fois en 1851 dans la grande coupole du panthéon, a une longueur de 67 m et une masse de $36 kg$. Un dispositif d'entretien des oscillations lui permet d'osciller sans amortissement, et le plan des oscillations peut tourner librement autour d'un axe vertical passant par son point d'attache. Lors du lancement, on l'abandonne sans vitesse initiale à une distance horizontale de 3 m de sa position d'équilibre.

1. Calculer sa période ainsi que son amplitude. Vérifier quantitativement que l'oscillation a quasiment lieu dans un plan horizontal.

2. Pour simplifier, on se place au pôle nord. Par un raisonnement simple, expliquer dans quel sens et avec quelle période le plan (vertical) des oscillations tourne par rapport à la terre.

3. Reprendre, toujours qualitativement, ce raisonnement mais en faisant intervenir la force de coriolis. Représenter en particulier une allure de la trajectoire sur un aller-retour.

4. Toujours au pôle nord, et en faisant l'approximation que le mouvement est dans un plan horizontal, exprimer la vitesse et l'accélération dans le référentiel terrestre local. On orientera l'axe (Oz) verticalement vers le bas, et on utilisera des coordonnées polaires (ρ, ϕ).

5. En faisant les approximations nécessaires, retrouver la périodicité de rotation du plan des oscillations.

6. On se place maintenant à une latitude quelconque. Que vaut cette fois la périodicité de rotation du plan des oscillations ?

Exercice 1 Pression de radiation

On s'intéresse à la réflexion d'une onde électromagnétique (plane et monochromatique, polarisée rectilignement) sur un conducteur parfait (en incidence normale). On rappelle les relations de passage entre deux milieux, $\vec{n}_{12}$ étant un vecteur unitaire orthogonal à l'interface dirigé du milieu 1 vers le milieu 2 :

$$\vec{n}_{12}.(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{n}_{12}.(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$$

1. Exprimer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ réfléchis, en déduire le courant de surface sur le conducteur.
2. Expliquer l'origine physique de la pression de radiation.
3. Montrer que son expression est $p = \varepsilon_0 E_0^2$ où E_0 est l'amplitude du champ électrique incident.
4. Retrouver cette expression via un modèle corpusculaire de l'onde incidente.

Exercice 2 Marées

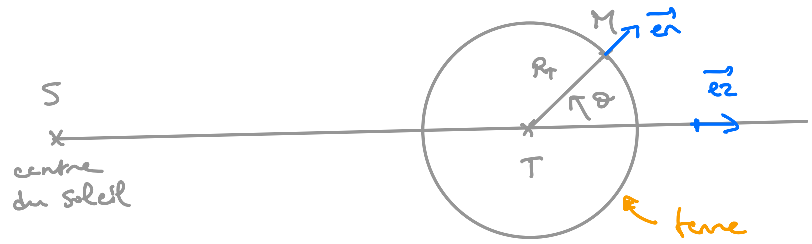
1. Expliquer la périodicité semi-diurne des marées.
2. On donne les masses de la lune et du soleil $M_L = 7,35.10^{22}\ kg$ et $M_S = 2.10^{30}\ kg$ ainsi que les distances terre lune et terre soleil en vitesse lumière, respectivement $1,25\ s$ et $500s$. Evaluer l'importance relative des contributions de la lune et du soleil sur les marées.

1. Les marées résultent de l'action sur les masses d'eau océaniques de deux forces associées à un astre (soleil / lune) :

- la force de gravitation exercée par l'astre
- la force d'inertie d'entraînement de translation due à cet astre

On analyse ici l'influence du soleil, mais c'est exactement la même chose pour la lune (il est simplement plus facile d'imaginer la terre qui tourne autour du soleil plutôt qu'autour du barycentre du système terre-lune).

Le point M subit la force de gravitation du soleil :



$$\vec{f}_{S\to M} = -G M_S m \frac{\vec{SM}}{SM^3}$$

Et la force d'inertie :

$$\vec{f_{ie}} = -m\,\vec{a_e}$$

Avec $\vec{a_e} = \vec{a}(T/Rh)$

Pour déterminer $\vec{a}(T/Rh)$, on utilise la 2° loi de Newton appliquée à la terre (assimilée au point T de masse M_T) dans le ref. héliocentrique Rh, que l'on peut considérer comme galiléen (on peut être plus précis en considérant le ref. barycentrique soleil / terre, mais on obtient le même résultat) :

$$M_T\,\vec{a}(T/Rh) = \vec{f}_{S\to T} = -G M_S M_T \frac{\vec{ST}}{ST^3} \quad \text{donc} \quad \vec{a_e} = -G M_S \frac{\vec{ST}}{ST^3}$$

Et donc $\vec{f_{ie}} = G M_S m \dfrac{\vec{ST}}{ST^3}$

En sommant les 2 forces : $\boxed{\vec{f}_{marée} = -G M_S m \left(\dfrac{\vec{SM}}{SM^3} - \dfrac{\vec{ST}}{ST^3}\right)}$

On peut ensuite simplifier en faisant des approximations, dans la mesure où ST (distance terre-soleil) est grande devant R_T (rayon de la terre) :

~

$\vec{SM} = \vec{ST} + \vec{TM} = ST\,\vec{e_z} + \underbrace{TM}_{=R_T}\,\vec{e_r}$

Donc $SM^2 = ST^2 + 2\,ST \cdot R_T\,\underbrace{\vec{e_z}\cdot\vec{e_r}}_{=\cos\theta} + R_T^2 = ST^2\left(1 + \frac{2R_T\cos\theta}{ST} + \underbrace{\frac{R_T^2}{ST^2}}_{\text{négligeable, 2° ordre en } \frac{R_T}{ST}}\right)$.

On a besoin de $\frac{1}{SM^3}$: $\frac{1}{SM^3} = \left(SM^2\right)^{-3/2} = \frac{1}{ST^3}\left(1 + \frac{2R_T\cos\theta}{ST}\right)^{-3/2}$

DL 1° ordre

$$\simeq \frac{1}{ST^3}\left(1 - \frac{3R_T\cos\theta}{ST}\right)$$

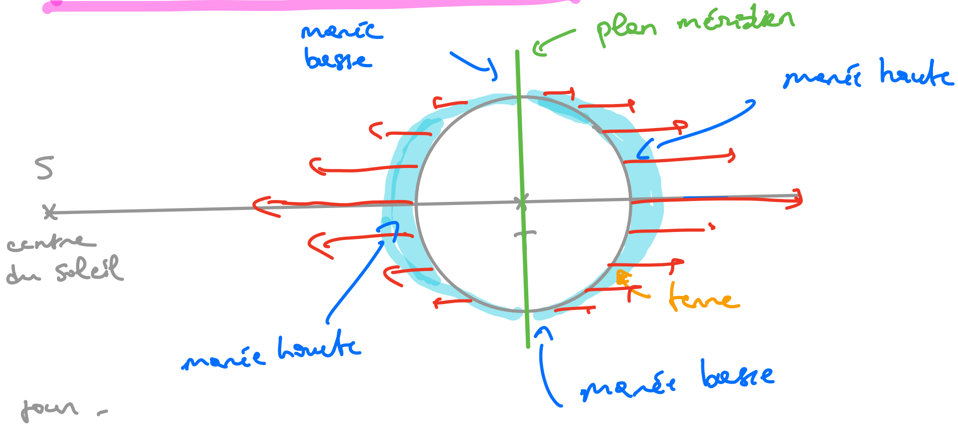
D'où $\frac{\vec{SM}}{SM^3} - \frac{\vec{ST}}{ST^3} = \left(ST\,\vec{e_z} + R_T\,\vec{e_r}\right)\frac{1}{ST^3}\left(1 - \frac{3R_T\cos\theta}{ST}\right) - \frac{ST\,\vec{e_z}}{ST^3}$

$$= \frac{1}{ST^3}\left(\cancel{ST\,\vec{e_z}} + R_T\,\vec{e_r} - 3R_T\cos\theta\,\vec{e_z} - \underbrace{\frac{3R_T^2\cos\theta}{R_T}\,\vec{e_r}}_{\text{négligeable}} - \cancel{ST\,\vec{e_z}}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{ST^3}\left(R_T\,\vec{e_r} - 3R_T\cos\theta\,\vec{e_z}\right)$$

Le terme en $R_T\,\vec{e_r}$ est à symétrie sphérique et donc n'influe pas sur les marées. Finalement, il reste : $\boxed{\vec{f}_{marée} \simeq \frac{3\,G M_S\, m\, R_T}{ST^3}\cos\theta\,\vec{e_z}}$

La force de marée agit comme un champ de répulsion de part et d'autre du plan méridien (orthogonal à ST et passe par T). La Terre tournant sur elle même en environ 1 jour, on prévoit bien 2 cycles de marée par jour.



2. Les forces associées à la lune et au soleil sont analogues, mais le facteur en $\frac{M_S}{TS^3}$ du soleil devient $\frac{M_L}{TL^3}$; ainsi pour quantifier les influences relatives de la lune et du soleil, il faut calculer :

$\frac{\text{influence lune}}{\text{influence soleil}} = \frac{M_L / LT^3}{M_S / ST^3}$ Avec les valeurs fournies, on trouve un facteur de l'ordre de 2,3 (à l'avantage de la lune, donc).

Exercice 3 Modèle d'Einstein

Le modèle d'einstein consiste à considérer un solide comportant N atomes comme N oscillateurs harmoniques à 3 dimensions. On rappelle que, en physique quantique, les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique $1D$ sont donnés par :

$$E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2)$$

1. Montrer que ce modèle prévoit l'effondrement de la capacité thermique à basse température
2. Retrouver, pour les hautes températures, la loi de dulong et petit.

1. Il s'agit, essentiellement, de faire le calcul de l'énergie interne et de la capacité thermique pour le modèle de distributions d'énergies proposé.
Le plus simple est d'utiliser la fonction de partition, en considérant le solide comme $3N$ oscillateurs $1D$. Alors, $\boxed{Z = z^{3N}}$ avec $z = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}$

D'où $z = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}} e^{-\beta\hbar\omega_0 n}$

$$= e^{-\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}} \times \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega_0}} = \frac{1}{e^{\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}} - e^{-\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}}} = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)}$$

On peut poser $\boxed{x = \frac{\beta\hbar\omega_0}{2}}$ et alors $\boxed{z = \frac{1}{2\,\mathrm{sh}(x)}}$

On en déduit l'énergie interne par $U = -\frac{d}{d\beta}(\ln(Z))$

avec $\ln(Z) = \ln(z^{3N}) = 3N \ln(z) = 3N \ln\left(\frac{1}{2\,\mathrm{sh}(x)}\right) = -3N\left(\ln(2) + \ln(\mathrm{sh}(x))\right)$

D'où $U = -\left(-3N \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} \frac{d\ln(\mathrm{sh}(x))}{d\beta}\right) = 3N \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} \frac{d\ln(\mathrm{sh}(x))}{dx} \cdot \frac{dx}{d\beta} = 3N \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)} \frac{\hbar\omega_0}{2}$

Soit $\boxed{U = 3N \frac{\hbar\omega_0}{2} \coth(x)}$

Enfin, on obtient la capacité thermique par $C = \frac{dU}{dT}$

Donc $C = 3N \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(-\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}\right) \frac{dx}{dT}$ $\left(\text{car } \coth' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2}\right)$

et $\frac{dx}{dT} = \frac{d\left(\frac{\hbar\omega_0}{2k_BT}\right)}{dT} = -\frac{\hbar\omega_0}{2k_BT^2}$

D'où $C = 3N \frac{\hbar\omega_0}{2} \left(-\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}\right)\left(-\frac{\hbar\omega_0}{2k_BT}\right)$

$$= 3N k_B \underbrace{\left(\frac{\hbar\omega_0}{2k_BT}\right)^2}_{= x^2} \frac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$$

Donc finalement $\boxed{C = 3N k_B \left(\frac{x}{\mathrm{sh}(x)}\right)^2}$

~

A basse température $x \to \infty$ $\left(x = \beta \frac{\hbar \omega_0}{2} = \frac{\hbar \omega_0}{2 k_B T} \right)$ et donc $C \to 0$

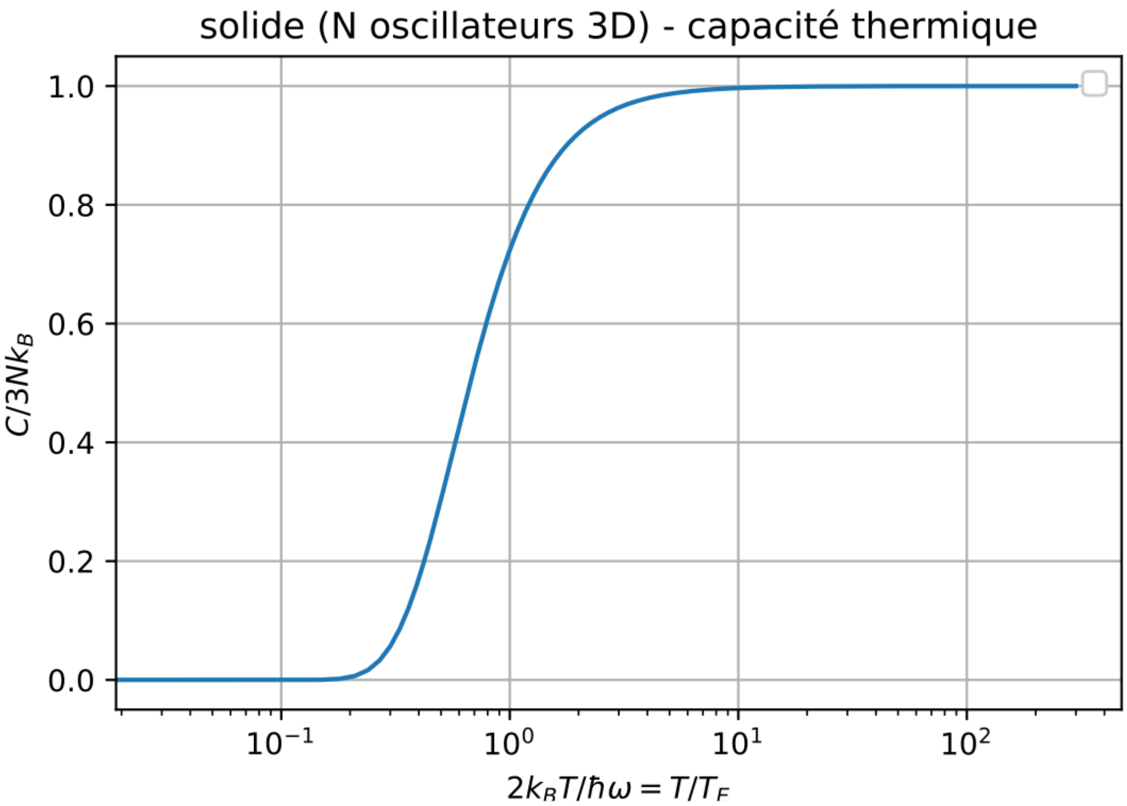
$\left(\text{car } \lim_{x \to 0} \frac{x}{sh(x)} = 0 \right)$

Ainsi, ce modèle prévoit bien l'effondrement de la capacité thermique à basse température.

2. Aux hautes températures, $x \to 0$ et alors $sh(x) \simeq x \Rightarrow \frac{x}{sh(x)} \simeq 1$

Donc $C = 3 N k_B$ ce qui constitue la loi de Dulong et petit,

car $3 k_B$ par particule correspond à $3R$ par mole.



Exercice 4 Pendule de Foucault

Le pendule de foucault, installé pour la première fois en 1851 dans la grande coupole du panthéon, a une longueur de 67 m et une masse de $36kg$. Un dispositif d'entretien des oscillations lui permet d'osciller sans amortissement, et le plan des oscillations peut tourner librement autour d'un axe vertical passant par son point d'attache. Lors du lancement, on l'abandonne sans vitesse initiale à une distance horizontale de 3 m de sa position d'équilibre.

1. Calculer sa période ainsi que son amplitude. Vérifier quantitativement que l'oscillation a quasiment lieu dans un plan horizontal.

2. Pour simplifier, on se place au pôle nord. Par un raisonnement simple, expliquer dans quel sens et avec quelle période le plan (vertical) des oscillations tourne par rapport à la terre.

3. Reprendre, toujours qualitativement, ce raisonnement mais en faisant intervenir la force de coriolis. Représenter en particulier une allure de la trajectoire sur un aller-retour.

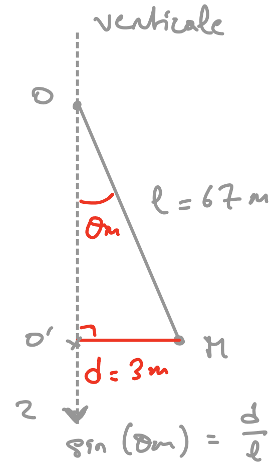
4. Toujours au pôle nord, et en faisant l'approximation que le mouvement est dans un plan horizontal, exprimer la vitesse et l'accélération dans le référentiel terrestre local. On orientera l'axe (Oz) verticalement vers le bas, et on utilisera des coordonnées polaires (ρ, ϕ).

5. En faisant les approximations nécessaires, retrouver la périodicité de rotation du plan des oscillations.

6. On se place maintenant à une latitude quelconque. Que vaut cette fois la périodicité de rotation du plan des oscillations ?

1. Situation classique de pendule simple (on peut considérer qu'à l'échelle d'un aller-retour le mouvement est celui d'un pendule simple dans un référentiel galiléen).

Donc $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ A.N : $T = 16,4\ s$



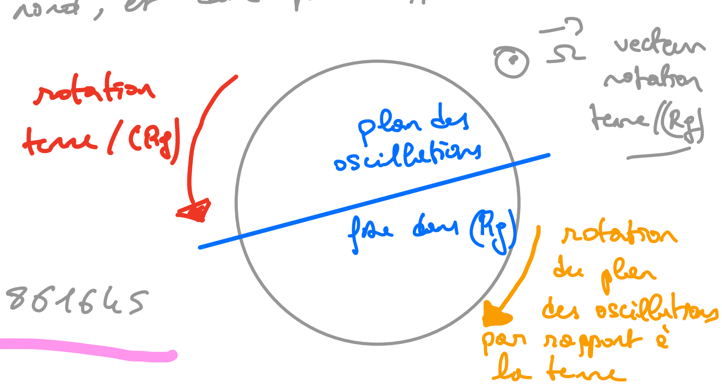
L'amplitude est reliée à la situation initiale :

$\theta_m = \arcsin(d/\ell)$ A.N : $\theta_m = 0,045$ rad $= 2,6°$

$z = \ell\cos\theta$ et $|\theta|$ varie entre 0 et θ_m, donc z varie entre ℓ et $\ell\cos(\theta_m)$, ainsi z varie au maximum de $\Delta z = \ell(1-\cos(\theta_m))$ A.N : $\Delta z = 0,067\ m = 6,7\ cm$

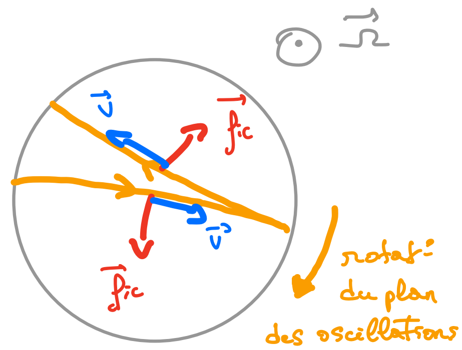
Ainsi, Δz représente 0,1 % de la longueur du pendule, l'approximation d'un mouvement dans un plan horizontal $z = \ell$ semble légitime.

2. Pour cette question, on se place dans le référentiel géocentrique. Le plan (vertical) des oscillations du pendule y est immobile (le ref géocentrique est, vis à vis de la rotation propre de la terre, galiléen, aucune raison qu'il tourne). Mais la terre tourne dans le ref. géocentrique, dans le sens trigo si on regarde du dessus du pôle nord, et donc par rapport à la terre, le plan des oscillations tourne dans le sens horaire. La période de cette rotation du plan des oscillations est égale à la période de rotation propre de la terre, donc au jour sidéral $T_s = 86164\ s$



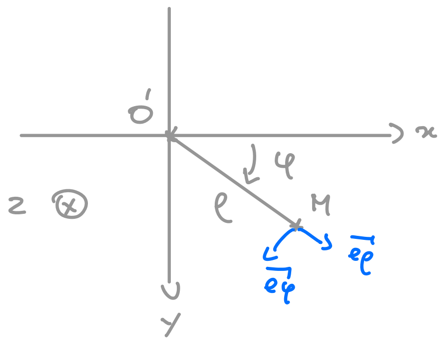
3. On se place cette fois dans le référentiel terrestre (toujours au pôle nord).
On doit alors prendre en compte la force de Coriolis, qui cause la rotation du plan des oscillations : $\vec{f_{ic}} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v}$

La force de Coriolis incurve la trajectoire, ce qui explique le sens de la rotation.



4. On se place dans un plan horizontal, toujours vu du coté nord. L'axe (Oz) est vertical vers le bas.

$\odot\ \vec{\Omega} = -\Omega\vec{e_z}$



$\vec{O'M} = \rho\,\vec{e_\rho} \Rightarrow \vec{v} = \dot\rho\,\vec{e_\rho} + \rho\dot\varphi\,\vec{e_\varphi}$

$\Rightarrow \vec{a} = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\vec{e_\rho} + (2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)\vec{e_\varphi}$

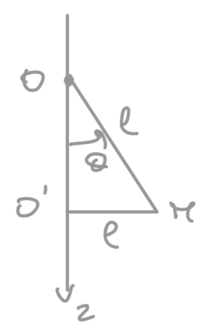
5. Considérons quelques ordres de grandeur : $\dot\rho$ est max quand $\theta = 0$ (comme sur le schéma de la question 1, θ est l'angle entre la verticale et le fil du pendule), et alors $\dot\rho = \ell\dot\theta = \ell\omega_0\theta_m$

(car $\theta = \theta_m\cos(\omega_0 t) \Rightarrow \dot\theta = -\omega_0\theta_m\sin(\omega_0 t) \Rightarrow$ au max $\dot\theta = \omega_0\theta_m$

et $\rho = \ell\sin(\theta) \simeq \ell\theta$ avec $\theta \ll 1 \Rightarrow \dot\rho = \ell\dot\theta \Rightarrow$ au max, $\dot\rho = \ell\omega_0\theta_m$)

l'A.N avec les valeurs calculées question 1 donne

$\dot\rho_{max} \simeq 1{,}15\ m.s^{-1}$



D'un autre coté, $\dot\varphi$ est la vitesse angulaire de rotation du plan des oscillations, donc on sait que $\dot\varphi \simeq \frac{2\pi}{T_S}$

Ainsi, au max, $\rho\dot\varphi \simeq \rho_{max}\frac{2\pi}{T_S}$ avec $\rho_{max} = 3\,m$,

l'AN donne $(\rho\dot\varphi)_{max} \simeq 2{,}2.10^{-4}\ m.s^{-1}$

On peut donc raisonablement négliger cette composante de la vitesse dans le calcul de la force de Coriolis, et donc

$\vec{f_{ic}} \simeq -2m(-\Omega\vec{e_z})\wedge(\dot\rho\,\vec{e_\rho}) \simeq 2m\Omega\dot\rho\,\vec{e_\varphi}$

La 2e loi de Newton appliquée au pendule et projetée sur $\vec{e_\varphi}$ donne donc :

$m(2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi) = 2m\Omega\dot\rho$ (les autres forces, le poids et la tension du fil, n'ont pas de composante sur $\vec{e_\varphi}$).

Là encore on fait une approximation : $\rho\ddot{\varphi} \ll 2\dot{\rho}\dot{\varphi}$ (la rotation du plan des oscillations se fait à vitesse constante, donc $\ddot{\varphi} = 0$).

D'où, finalement, $\cancel{2}\cancel{m}\cancel{\dot{\rho}}\dot{\varphi} = \cancel{2}\cancel{m}\Omega\cancel{\dot{\rho}} \Rightarrow \boxed{\dot{\varphi} = \Omega}$

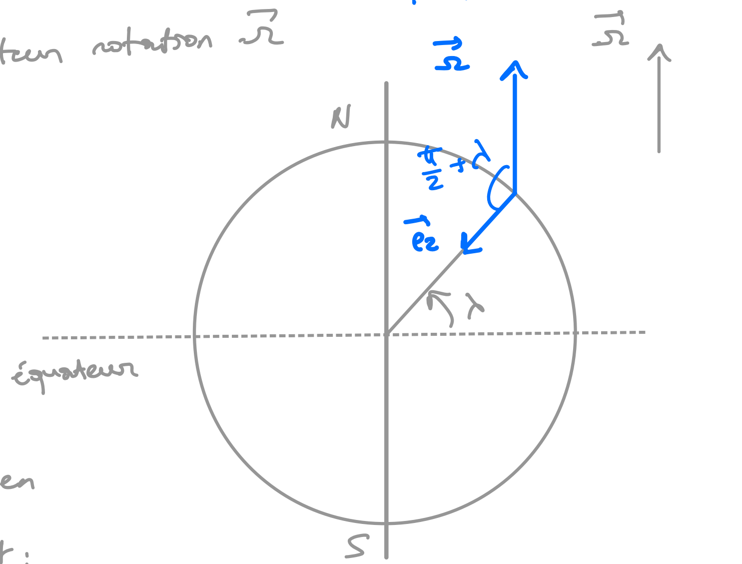
on retrouve bien une vitesse angulaire du plan des oscillat° égale à la rotation propre de la terre.

6. On peut enfin regarder ce qui se passe à une latitude différente : ce qui est important est la projection sur $\vec{e_z}$ du vecteur rotation $\vec{\Omega}$ (qui valait $-\Omega$ au pôle nord)

$$\Omega_z = \vec{\Omega}\cdot\vec{e_z} = \Omega\cos(\pi/2+\lambda)$$

$$= -\Omega\sin\lambda$$

(on retrouve donc bien $\Omega_z = -\Omega$ au pôle nord)



Si on reprend le calcul précédent, en remplaçant Ω par $\Omega\sin\lambda$, on obtient :

$$\dot{\varphi} = \Omega\sin\lambda$$

Ainsi, $T = \frac{2\pi}{\dot{\varphi}} = \frac{2\pi}{\Omega\sin\lambda}$ et donc $\boxed{T = \frac{T_s}{\sin\lambda}}$

La latitude à Paris est $\lambda = 48{,}52°$, ce qui donne $T = 115\,000$ s soit 31 h 57 min environ.