

Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 1 : 9 au 13 septembre 2024

Questions de cours

Chaque semaine, le colleur peut demander en question de cours de citer un théorème, une propriété, une définition de son choix. Il peut aussi piocher dans la liste suivante :

- Formule de trigonométrie.
- Calcul simple portant sur les nombres complexes.
- Décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints, ou en produit de transpositions. Déterminer sa signature.
- Sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ (avec démonstration).
- Montrer que le centre d'un anneau A (la définition sera redonnée par le colleur) est un sous-anneau de A .
- Montrer que $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un corps.

Ce premier programme de colle est l'occasion de revoir les nombres complexes ainsi que la trigonométrie. Tout exercice portant sur ces notions est le bienvenu.

Chapitre 1 : Structure de groupe

I Ensembles et applications

I.1 Injectivité, surjectivité

- exercices de révision.

I.2 Image directe, image réciproque

- exercices de révision.

I.3 Relations d'équivalence

- exercices de révision.

II Groupes et sous-groupes

II.1 Exemples

- exemples de groupes additifs, de groupes multiplicatifs, groupe des permutations.
- produit fini de groupes.

II.2 Sous-groupes

- sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$.
- intersection de sous-groupes.

II.3 Morphismes de groupes

- noyau, image d'un morphisme de groupes.
- image directe d'un sous-groupe, image réciproque d'un sous-groupe.
- itérés d'un élément x d'un groupe G , morphisme de groupes $k \in (\mathbb{Z}, +) \mapsto x^k \in (G, \cdot)$.

Chapitre 2 : Structure d'anneau

I Anneaux

I.1 Généralités

- définitions d'un anneau, d'un anneau commutatif. Exemples.
- sous-anneau.
- morphisme d'anneaux. Le noyau d'un morphisme d'anneaux f est le noyau de f vu comme un morphisme de groupes. $\text{Ker}(f)$ n'est pas un sous-anneau.
- produit fini d'anneaux.

I.2 Groupe des inversibles d'un anneau

- l'ensemble des inversibles d'un anneau forme un groupe.
- exemples.

I.3 Calculs dans un anneau

- formule du binôme. \triangle ne pas oublier l'hypothèse : a et b commutent.
- formule $a^n - b^n$ lorsque a et b commutent.

I.4 Anneaux intègres et corps

- définition d'un anneau intègre (commutatif, non nul, sans diviseur de zéro).
- divisibilité dans un anneau intègre.
- définition d'un corps (commutatif, non nul, tout élément non nul est inversible). Tout corps est intègre.

Hors programme cette semaine :

Idéaux.

Anneau des polynômes.