Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 2 : 16 au 20 septembre 2024

Questions de cours

Chaque semaine, le colleur peut demander en question de cours de citer un théorème, une propriété, une définition de son choix. Il peut aussi piocher dans la liste suivante :

- ☐ Soient A et B deux anneaux commutatifs et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Établir que pour tout idéal I de A, $f(I)$ est un idéal de l'anneau $f(A)$.
- ☐ Soit $x \in A$. Montrer que xA est le plus petit idéal de A qui contient x.
- ☐ Montrer que les polynômes de degré 1 sont tous irréductibles et que les polynômes de degré supérieur ou égal à 2 qui admettent au moins une racine ne le sont pas.
- ☐ Décomposer $X^4 + 1$ en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
- ☐ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.

Chapitre 2 : Structure d'anneau

II Idéal d'un anneau commutatif

II.1 Généralités

- définition d'un idéal d'un anneau commutatif.
- le seul idéal contenant 1_A est A.
- le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

II.2 Idéal engendré par un élément

- xA est le plus petit idéal de A contenant x ; c'est l'idéal engendré par x.
- x divise y si et seulement si $yA \subset xA$.

II.3 Somme d'idéaux

- la somme d'idéaux $\sum_{k=1}^{n} I_k$ est un idéal.
- notion d'anneau principal. *La définition d'un idéal principal n'est pas au programme ; cependant, on a vu que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$ (où $\mathbb{K}$ est un corps) sont des anneaux principaux, et que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal.*

II.4 Idéaux de $\mathbb{Z}$

- idéaux de $\mathbb{Z}$.
- définition du PGCD de n entiers en termes d'idéaux.

III Anneau $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ (en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

III.1 Rappels sur $\mathbb{K}[X]$

- degré d'un polynôme.
- intégrité de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.
- groupe des inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$.
- polynômes associés (P divise Q et Q divise P).
- formule de Taylor pour les polynômes : ⚠ bien noter la différence avec les formules de Taylor générales.
- division euclidienne.
- ordre de multiplicité d'une racine.
- si λ est une racine complexe de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors λ et $\overline{\lambda}$ sont des racines de P de même multiplicité.

III.2 Idéaux de $\mathbb{K}[X]$

- idéaux de $\mathbb{K}[X]$. Pour tout idéal I non nul de $\mathbb{K}[X]$, il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $I = P\mathbb{K}[X]$.
- définition du PGCD de n polynômes en termes d'idéaux (par définition, le PGCD est unitaire).
- algorithme d'Euclide.
- théorème de Bézout. Algorithme d'Euclide étendu.
- lemme de Gauss.

III.3 Polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$

- définition d'un polynôme irréductible. Cas des polynômes de degré 1. Cas des polynômes de degré 2 admettant une racine dans $\mathbb{K}$.
- polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, théorème de d'Alembert-Gauss.
- polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
- existence et unicité (à l'ordre des facteurs près) de la décomposition en irréductibles.

IV Algèbres

IV.1 Définition

- définition et exemples.

IV.2 Sous-algèbres

- définition et exemples.

IV.3 Morphismes d'algèbres

- définition et exemples.

Chapitre 3 : Structure d'espace vectoriel

I Révisions de MPSI

I.1 Espaces vectoriels

- définition et exemples.
- sous-espaces vectoriels, intersection de sous-espaces vectoriels, sous-espaces affines, ensemble de solutions de systèmes linéaires.
- combinaisons linéaires. Sous-espaces vectoriels engendrés.
- familles génératrices, familles libres, bases.
- suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
- espace vectoriel de dimension finie. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Théorème de la base incomplète.

I.2 Applications linéaires

- définitions (applications linéaires, isomorphismes, endomorphismes, automorphismes).
- détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.
- noyau et image. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
- structures de $\mathcal{L}(E, F)$, de $\mathcal{L}(E)$ et de $GL(E)$. Formule du binôme.
- rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Rang de $v \circ u$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.
- formes linéaires et hyperplans.
- application au polynôme interpolateur de Lagrange.

I.3 Matrices

- matrices rectangulaires. Matrices carrées. Matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques. Formule du binôme.
- matrices inversibles.
- matrices des coordonnées. Matrices et applications linéaires. Formules de changement de bases.
- rang d'une matrice.
- trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

I.4 Déterminants

- formes n-linéaires alternées.
- déterminant d'une famille de vecteurs.
- déterminant d'un endomorphisme.
- déterminant d'une matrice. Cas particuliers des matrices 2×2, 3×3 et triangulaires.
- développement du déterminant par rapport à la i-ème ligne, à la j-ème colonne.
- mineur, cofacteur, matrice des cofacteurs, formule pour A^{-1} lorsque $\det(A) \neq 0$.
- orientation d'un espace vectoriel de dimension finie. Bases directes, bases indirectes.

Hors programme cette semaine :

Sommes, sommes directes, supplémentaires, projecteurs, symétries.
Matrices par blocs
Polynômes d'endomorphismes et de matrices.