Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 3 : 23 au 27 septembre 2024

Questions de cours

Chaque semaine, le colleur peut demander en question de cours de citer un théorème, une propriété, une définition de son choix (en particulier, toutes les propriétés des projecteurs et des symétries). Il peut aussi piocher dans la liste suivante :

- ☐ Démontrer que la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$, $x_1 + \cdots + x_p = 0_E \;\Rightarrow\; \forall i \in [\![1,p]\!],\, x_i = 0_E$.
- ☐ Soit $u : E \to F$. Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E. Montrer que $\widetilde{u} : x \in G \mapsto u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ est un isomorphisme. En déduire le théorème du rang.
- ☐ On se donne deux espaces vectoriels E et G, une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{q} F_i$ et des applications linéaires $u_i : F_i \to G$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $u : E \to G$ telle que pour tout $i \in [\![i,q]\!]$, la restriction de u à F_i est u_i.
- ☐ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $P(A)$ et $P(B)$ sont aussi semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- ☐ Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si u et v commutent, alors $\mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont stables par u.

Chapitre 3 : Structure d'espace vectoriel

I Révisions de MPSI

I.1 Espaces vectoriels

- définition et exemples.
- sous-espaces vectoriels, intersection de sous-espaces vectoriels, sous-espaces affines, ensemble de solutions de systèmes linéaires.
- combinaisons linéaires. Sous-espaces vectoriels engendrés.
- familles génératrices, familles libres, bases.
- suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
- espace vectoriel de dimension finie. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Théorème de la base incomplète.

I.2 Applications linéaires

- définitions (applications linéaires, isomorphismes, endomorphismes, automorphismes).
- détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.
- noyau et image. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité.
- structures de $\mathcal{L}(E,F)$, de $\mathcal{L}(E)$ et de $GL(E)$. Formule du binôme.
- rang d'une application linéaire. Théorème du rang. Rang de $v \circ u$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.

- formes linéaires et hyperplans.
- application au polynôme interpolateur de Lagrange.

I.3 Matrices

- matrices rectangulaires. Matrices carrées. Matrices diagonales, triangulaires, symétriques, antisymétriques. Formule du binôme.
- matrices inversibles.
- matrices des coordonnées. Matrices et applications linéaires. Formules de changement de bases.
- rang d'une matrice.
- trace d'une matrice, d'un endomorphisme.

I.4 Déterminants

- formes n-linéaires alternées.
- déterminant d'une famille de vecteurs.
- déterminant d'un endomorphisme.
- déterminant d'une matrice. Cas particuliers des matrices 2×2, 3×3 et triangulaires.
- développement du déterminant par rapport à la i-ème ligne, à la j-ème colonne.
- mineur, cofacteur, matrice des cofacteurs, formule pour A^{-1} lorsque $\det(A) \neq 0$.
- orientation d'un espace vectoriel de dimension finie. Bases directes, bases indirectes.

II Sommes de sous-espaces vectoriels

II.1 Somme et somme directe

- somme de deux sous-espaces vectoriels. Somme de p sous-espaces vectoriels.
- $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\bigcup\limits_{i=1}^{p} F_i$.
- formule de Grassmann.

II.2 Somme directe

- définition de la somme directe de p sous-espace vectoriels.
- caractérisation de somme directe pour deux sous-espaces.
- caractérisation de somme directe pour p sous-espaces. Dimension de la somme directe de p sous-espaces.
- base adaptée à une décomposition en somme directe.

II.3 Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel

- définition de deux sous-espaces supplémentaires.
- caractérisations de sous-espaces supplémentaires.
- théorème d'existence d'un supplémentaire. Pas d'unicité.
- retour sur le théorème du rang : isomorphisme entre un supplémentaire du noyau et l'image.

II.4 Projecteurs et symétries

- définition et propriétés d'un projecteur.
- définition et propriétés d'une symétrie.
- projecteurs associés à une décomposition en somme directe.
- si $E = \bigoplus_{i=1}^{q} F_i$, caractérisation d'une application linéaire $u : E \to G$ par ses restrictions aux F_i.

III Matrices par blocs

III.1 Exemples

- exemples d'écriture par blocs.
- matrice par blocs d'un projecteur et d'une symétrie dans une base adaptée.

III.2 Opérations classiques

- transposition par blocs, combinaison linéaire par blocs, produit par blocs.
- déterminant d'une matrice diagonale par blocs.
- déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.
- transvections par blocs.

IV Polynômes d'endomorphismes et de matrices

IV.1 Un morphisme d'algèbres

- définitions.
- morphisme d'algèbres $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u) \in \mathcal{L}(E)$.
- deux polynômes en le même endomorphisme commutent.
- morphisme d'algèbres $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- deux polynômes en la même matrice commutent.

IV.2 Image et noyau de ce morphisme d'algèbres

- $\mathbb{K}[u]$ désigne l'ensemble des polynômes en u. $\mathbb{K}[A]$ désigne l'ensemble des polynômes en A.
- polynôme annulateur d'un endomorphisme, polynôme annulateur d'une matrice.
- idéal des polynômes annulateurs.

IV.3 Compléments spécifiques aux polynômes de matrices

- polynôme en A lorsque A est une matrice diagonale, une matrice triangulaire, une matrice diagonale par blocs.

Chapitre 4 : Valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

I Premières propriétés

I.1 Sous-espaces stables

- définition, exemples.
- si u et v commutent, alors $\operatorname{Ker} v$ et $\operatorname{Im} v$ sont stables par u.
- restriction d'un endomorphisme à un sous-espace vectoriel, endomorphisme induit.
- sous-espaces stables et matrices par blocs.

I.2 Éléments propres

- valeur propre, vecteur propre, spectre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- exemples : projecteurs, symétries, endomorphismes nilpotents, homothéties.
- sous-espaces propres.

Hors programme cette semaine :

La notion de polynôme minimal a été rapidement évoquée mais elle fera l'objet d'une étude plus poussée par la suite.
Réduction des endomorphismes et des matrices carrées.