MP2 DS 1 PHYSIQUE

La durée est de 3 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Problème 1

L'étude expérimentale d'un filtre « R, C » série est réalisée grâce à un oscilloscope. L'exercice considère l'influence du « branchement » à l'appareil de mesure sur la pulsation de coupure, une des caractéristiques du filtre.

I. Étude théorique du filtre « R, C » série

Un groupement R, C série est alimenté avec une tension d'entrée $u_e(t) = U_{e,m} \cos \omega t$. La tension de sortie est notée $u_s(t) = U_{s,m} \cos (\omega t + \varphi)$ (figure **3**).

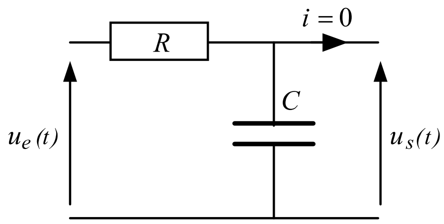


Figure **3**

1) Étudier, sans calcul, la nature de ce filtre, en envisageant son comportement limite pour $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$.

2) Déterminer, en fonction de R, C et ω, la fonction de transfert complexe $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre définie par le rapport des tensions complexes $\underline{u}_s$ et $\underline{u}_e$: $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$.

3) En déduire :

3.1 le gain G, défini par $G = \left|\underline{H}(j\omega)\right|$;

3.2 la phase φ ;

3.3 la pulsation de coupure ω_C , définie par $G(\omega_C) = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}}$.

4) Donner l'allure des courbes représentatives des fonctions $G(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.

5) *Application numérique* : $R = 10^4\ \Omega$ et $C = 10^{-8}$ F.
Calculer ω_C.

II. Branchement à l'oscilloscope

La tension de sortie u_s précédente est « appliquée » à l'entrée d'un oscilloscope, par l'intermédiaire d'un câble coaxial supposé idéal. L'impédance d'entrée de l'oscilloscope est caractérisée par le groupement parallèle R_o, C_o. La tension d'entrée u_e est maintenue ($u_e(t) = U_{e,m} \cos \omega t$) et u'_s est la tension de sortie aux bornes du résistor R_o (figure **4**).

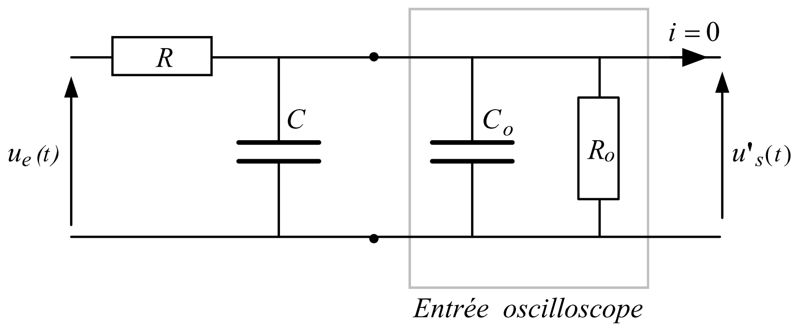


Figure **4**

1) Montrer que la fonction de transfert $\underline{H}'(j\omega) = \dfrac{\underline{u}'_s}{\underline{u}_e}$ de ce nouveau filtre se met sous la forme : $\underline{H}'(j\omega) = \dfrac{A}{1 + jB\omega}$, avec A et B constantes. Exprimer A et B à l'aide des données de la figure **4**.

2) En déduire le nouveau gain G'.

3) Exprimer, en fonction de R, R_o, C et C_o, la pulsation de coupure ω'_C correspondante.

4) *Application numérique* : $R = 10^4\ \Omega$; $R_o = 5 \times 10^6\ \Omega$; $C = 10^{-8}$ F ; $C_o = 5 \times 10^{-11}$ F. Calculer ω'_C.

5) Comparer les pulsations ω_C et ω'_C. Conclure.

Problème 2

Comme il est très difficile, pour ne pas dire impossible, de réaliser des haut-parleurs couvrant entièrement le spectre acoustique audible, on réalise des haut-parleurs spécialisés dans une zone déterminée de fréquences. On aboutit ainsi à réaliser des enceintes à deux voies (basses – aiguës) ou à trois voies (basse – médium – aiguës). Les filtres électriques chargés d'aiguiller les fréquences correspondant à ces haut-parleurs doivent répondre à trois critères essentiels :

• **1er critère :** atténuer suffisamment les fréquences hors bande ;

• **2e critère :** présenter une impédance de charge aussi constante que possible à l'amplificateur, de façon à ce que la puissance absorbée par l'ensemble soit constante et indépendante de la fréquence ;

• **3e critère :** le rayonnement global doit être à intensité acoustique constante.

Pour satisfaire aux conditions ci-dessus, il est nécessaire de faire appel aux filtres de Butterworth, qui sont des filtres d'ordre n dont le module de la fonction de transfert vérifie une condition particulière :

• pour un passe-bas : $H_b(x) = |\underline{H}_b(jx)| = \frac{1}{\sqrt{1+x^{2n}}}$

$$\text{avec} \quad \underline{H}_b(jx) = \frac{1}{1+a_1(jx)+a_2(jx)^2+\ldots+a_n(jx)^n} \ ;$$

• pour un passe-haut : $H_h(x) = |\underline{H}_h(jx)| = \sqrt{\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}}$

avec $\underline{H}_h(jx) = \frac{(jx)^n}{1+a_1(jx)+a_2(jx)^2+\ldots+a_n(jx)^n}$.

Dans les deux cas, on a pris $x = \omega/\omega_0$. On a alors $H_b^2 + H_h^2 = 1$: la puissance délivrée par l'amplificateur est constante. En conséquence, seuls les filtres passe-bas et passe-haut répondant à ces formules satisfont à la condition de puissance constante.

1. On se place dans le cas où n = 3 pour un passe-bas. Calculer les valeurs qu'il faut donner aux différents coefficients **strictement positifs** a_1, a_2 et a_3. On trouvera trois entiers.
Les filtres du troisième ordre ont la structure suivante pour un ensemble à deux haut-parleurs :

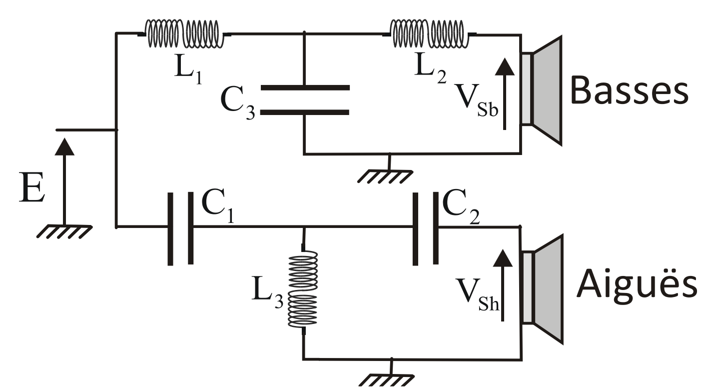


Figure 5 - Structure à deux haut-parleurs

La fonction de transfert du filtre représenté à la **figure 6** est :

$$\underline{H}_b(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\dfrac{L_1 + L_2}{R} + (j\omega)^2 L_1 C_3 + (j\omega)^3\dfrac{L_1 L_2 C_3}{R}} = \frac{\underline{V}_{Sb}}{\underline{E}} .$$

2. Vérifier que cette fonction de transfert est compatible avec le schéma aux basses et hautes fréquences. De quel type de filtre s'agit-il ?

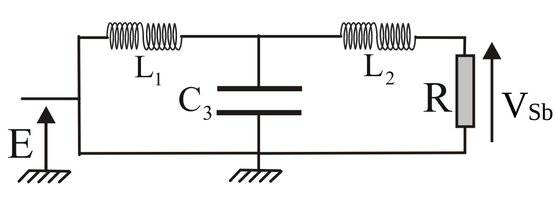


Figure 6 - Partie voie des basses

3. Déduire de la question précédente les coefficients L_1 , L_2 et C_3 en fonction de R et de ω_0 sachant qu'il s'agit d'un filtre passe-bas de Butterworth d'ordre trois.

4. Justifier la structure retenue ci-dessous sur la **figure 7** pour les aiguës. Sans développer les calculs, proposer les étapes permettant d'établir la fonction de transfert.

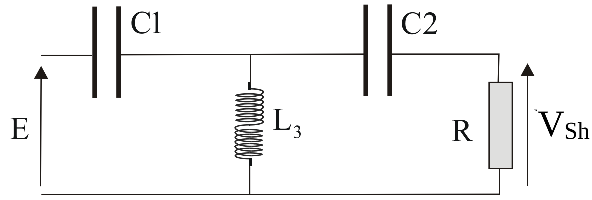
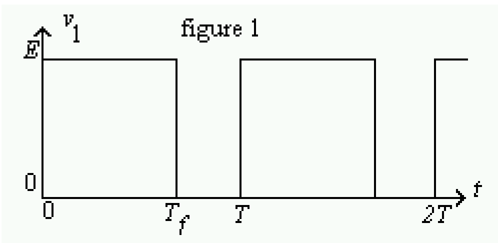
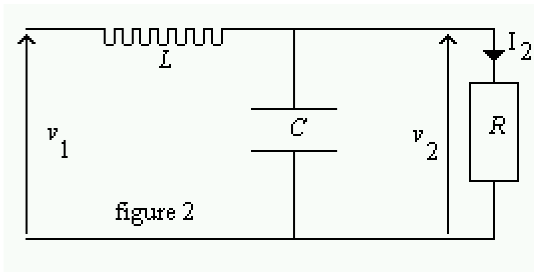


Figure 7 - Partie voie des aiguës

Problème 3

De nombreux circuits électroniques sont alimentés avec une tension continue. Une alimentation à découpage transforme, en plusieurs étapes, la tension alternative sinusoïdale du réseau électrique en une tension continue. La dernière étape consiste à filtrer une tension rectangulaire représentée figure 1 par le filtre passif « L,C » de la figure 2 dans lequel *R* symbolise l'ensemble des circuits que l'on souhaite alimenter sous une tension presque parfaitement continue.





Dans un premier temps, on considère que $v_1(t)$ est une tension sinusoidale de pulsation ω.

1. Pourquoi est-il intéressant de procéder ainsi, alors que la tension que l'on veut étudier n'est pas sinusoidale ?

2. Déterminer sans calculs la nature de ce filtre.

3. Définir et exprimer l'impédance d'entrée du montage de la figure 2.

4.a Calculer la fonction de transfert (définie par $\underline{H} = \underline{v_2} / \underline{v_1}$, attention, cette fonction de transfert inclut la résistance R) et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $\underline{H} = 1 / ((1-x^2) + j\,Q\,x)$

Donner les expressions de Q et ω_0 (pour que $x = \omega / \omega_0$)

4.b Donner les expressions de $G=V_{2m} / V_{1m}$, du gain en décibels correspondant et du déphasage ϕ de v_2 par rapport à v_1.

On se place dans la suite dans le cas où Q = 10.

5.a Calculer la fréquence de coupure (en fonction de ω_0).

5.b Tracer le diagramme asymptotique en gain. Préciser la pente en dB / décade.

5.c Tracer le diagramme asymptotique en phase.

5.d Tracer **sommairement**, sans rechercher aucune complication, une allure des diagrammes réels.

On s'intéresse maintenant à l'effet du filtre sur le signal de la figure 1.

On note α le rapport T_f / T (rapport cyclique). **On prendra dans la suite** α **= ¾** ; E = 10 V et T = 0,1 ms.

6.a Que vaut la pulsation du fondamental ? (On la notera simplement ω). Donner sa valeur numérique.

6.b Calculer la valeur moyenne de $v_1(t)$. Donner le résultat en fonction de E et α puis la valeur numérique.

6.c Calculer la valeur efficace de $v_1(t)$. Donner le résultat en fonction de E et α puis la valeur numérique.

La tension $v_1(t)$ peut être décomposée en série de fourrier selon les expressions données ci-dessous : (expressions de A_n et B_n pour n>0).

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(n\omega t - \varphi)]$$

$$A_n = \frac{E}{n\pi}\sin(2\pi n\alpha); B_n = \frac{E}{n\pi}(1-\cos(2\pi n\alpha); C_n = (A_n^2 + B_n^2)^{1/2}.$$

7.a Montrer que A_0 représente la valeur moyenne.

7.b Calculer les coefficients A_1, A_2, B_1 et B_2.

7.c Donner l'expression de φ_n en fonction de A_n et B_n.

7.d Calculer C_1 ,C_2, φ_1 et φ_2.

7.e Donner une expression **numérique** de $v_1(t)$ comprenant la valeur moyenne, le fondamental (n=1) et l'harmonique correspondant à n=2.

8.a Sur quelle propriété du filtre repose le fait que la réponse du filtre à $v_1(t)$ puisse être égale à la somme des réponses à chaque composante sinusoidale de $v_1(t)$?

8.b Expliquer pourquoi on aura $<v_2(t)> = A_0$.

8.c On considère toujours que Q = 10. Que doit valoir ω_0 pour que le fondamental soit atténué de 20 dB ?

8.d R = 70 Ω. Quelles doivent être les valeurs de L et C ?

8.e Calculer, dans ces conditions, les amplitudes du fondamental et de l'harmonique n=2 de $v_2(t)$.

8.f Calculer, de même, les phases du fondamental et de l'harmonique n=2 de $v_2(t)$.

8.f Donner l'expression **numérique** de $v_2(t)$.

8.g Représenter sommairement $v_2(t)$.