Problème I

I

1. En BF, $-||- \Leftrightarrow -/-$, donc pas de courant dans R, donc $u_s = u_e$

En HF, $-||- \Leftrightarrow$ —, donc $u_s = 0$ Donc <u>passe bas</u>

2. R et C en série (courant de sortie nul), donc en utilisant le pont diviseur de tension : $\underline{u_s} = \underline{u_e} \cdot \dfrac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} = \dfrac{1}{1+jRC\omega}$

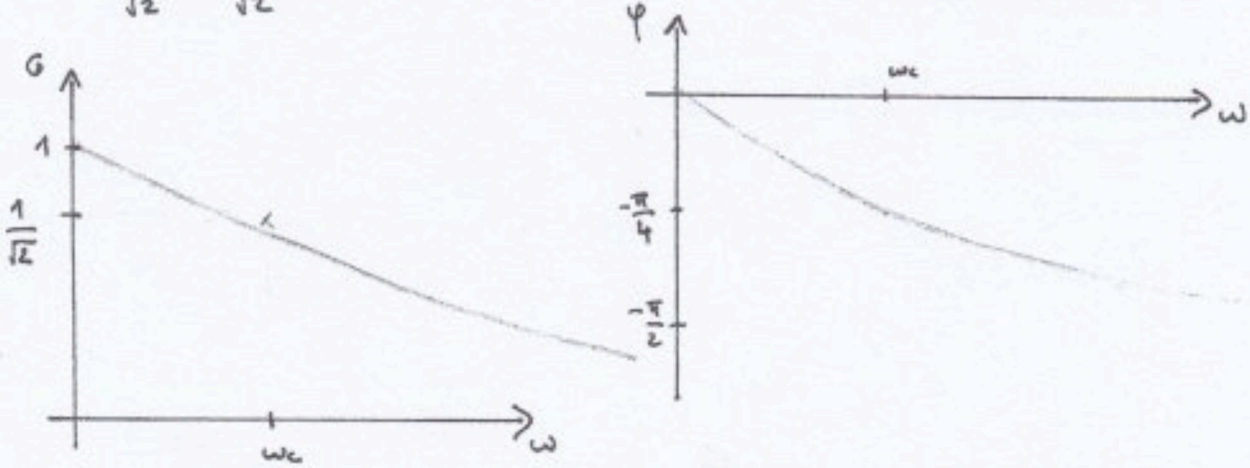
D'où $\boxed{\underline{H} = \dfrac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \dfrac{1}{1+jRC\omega}}$

3.1 $G = |\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$

3.2 $\varphi = \arg(\underline{H}) = -\arctan(RC\omega)$

3.3 $G = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ donne $1 + (RC\omega)^2 = 2$, et donc $\underline{\omega_c = \dfrac{1}{RC}}$

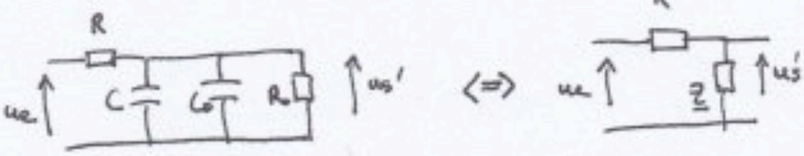
4.



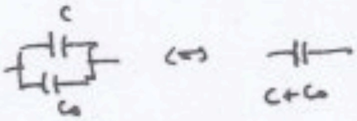
5. $\underline{\omega_c = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}}$

II

1.



avec $\underline{Z} = \dfrac{R_0 \times \dfrac{1}{j\omega(C+C_0)}}{R_0 + \dfrac{1}{j\omega(C+C_0)}} = \dfrac{R_0}{1 + j\omega R_0 (C+C_0)}$

en effet,  (en //, les capacités s'ajoutent).

On utilise ensuite le pont diviseur de tension : $\underline{u_s'} = \underline{u_e} \cdot \dfrac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}}$.

D'où $\underline{H}' = \dfrac{\dfrac{R_0}{1+j\omega R_0(C+C_0)}}{R + \dfrac{R_0}{1+j\omega R_0(C+C_0)}} = \dfrac{R_0}{R_0 + R(1 + j\omega R_0(C+C_0))}$

D'où $\underline{H}' = \dfrac{R_0}{R_0+R+j\omega RR_0(C+C_0)} = \dfrac{R_0/(R_0+R)}{1+j\omega \frac{RR_0}{R+R_0}(C+C_0)}$

Donc $\underline{H}' = \dfrac{A}{1+j\omega B}$ avec $\underline{A = \dfrac{R_0}{R_0+R}}$ et $\underline{B = \dfrac{RR_0}{R+R_0}(C+C_0)}$

2. $G' = |\underline{H}'| = \dfrac{A}{\sqrt{1+(\omega B)^2}}$ et on peut remplacer A et B ...

3. On cherche ω_c' tq $G'(\omega_c') = \dfrac{G'_{max}}{\sqrt{2}}$.

Or, $G'_{max} = G'(0) = A$. On veut donc $\dfrac{A}{\sqrt{1+(\omega_c' B)^2}} = \dfrac{A}{\sqrt{2}}$,

soit $1+(\omega_c' B)^2 = 2$, et donc $\omega_c' = \dfrac{1}{B}$.

soit $\underline{\omega_c' = \dfrac{R+R_0}{RR_0(C+C_0)}}$

4. $\underline{\omega_c' = 9970 \text{ rad.s}^{-1}}$

5. La pulsation de coupure dépend de ce qui est mis en sortie du filtre, mais avec les ordres de grandeur mis en jeu ici elle n'est que légèrement modifiée.

Problème 2

1. On veut $\left|\dfrac{1}{1+ja_1x-a_2x^2-ja_3x^3}\right|^2=\dfrac{1}{1+x^6}$, soit encore en notant $\underline{D}$ le dénominateur :

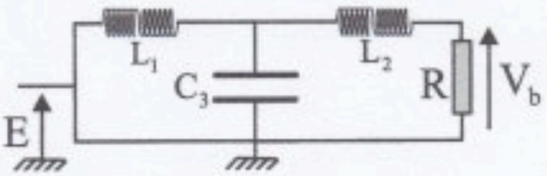
$$D^2=\left[\left(1-a_2x^2\right)+jx\left(a_1-a_3x^2\right)\right]\left[\left(1-a_2x^2\right)-jx\left(a_1-a_3x^2\right)\right]=1+x^6$$

$$D^2=\left(1-a_2x^2\right)^2+x^2\left(a_1-a_3x^2\right)^2=1+\left(a_1^2-2a_2\right)x^2+\left(a_2^2-2a_1a_3\right)x^4+a_3^2x^6=1+x^6$$

Il faut donc avoir $a_3=1$ et également $\begin{cases}a_1^2-2a_2=0\\ a_2^2-2a_1a_3=a_2^2-2a_1=0\end{cases}$, soit $a_1=\dfrac{a_2^2}{2}$

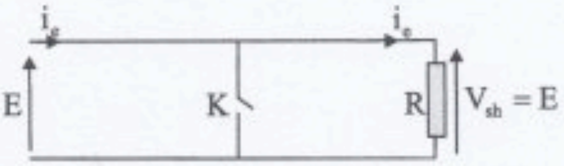
d'où $\dfrac{1}{4}a_2^4-2a_2=0 \Leftrightarrow a_2\left(a_2^3-8\right)=0$, soit $a_2=2$ et donc $a_1=2$.

Résumé : $a_1=2$, $a_2=2$, $a_3=1$



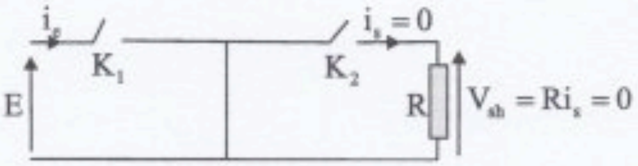
2. En BF, les bobines équivalent à des interrupteurs fermés et on a directement V_{sb}=E avec la loi des mailles.

Schéma équivalent :



En HF, les bobines ne laissent pas passer le courant, on a donc un courant nul dans la résistance R et V_{sb}=0.

Schéma équivalent :



On peut donc supposer un comportement passe-bas, compatible avec la fonction de transfert donnée.
Il s'agit d'un filtre passe-bas du troisième ordre (plus haut degré en ω au dénominateur).

3. La fonction de transfert est de la forme $\underline{H}_b(jx) = \dfrac{1}{1+2jx+2(jx)^2+(jx)^3}$ avec $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$, soit

$$\omega_0^3 = \frac{R}{L_1L_2C_3} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{2}{L_1C_3} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{2R}{L_1+L_2}$$

On en déduit : $\omega_0^3 = \dfrac{R}{L_1L_2C_3} = \dfrac{2\omega_0}{L_1C_3}$, soit $\boxed{L_2 = \dfrac{R}{2\omega_0}}$.

$$L_1 + L_2 = L_1 + \frac{R}{2\omega_0} = \frac{2R}{\omega_0}\text{ , soit } \boxed{L_1 = \frac{3R}{2\omega_0}}$$

Par conséquent, $C_3 = \dfrac{R}{L_1L_2\omega_0^3} = \dfrac{R}{\omega_0^3}\times\dfrac{2\omega_0}{3R}\times\dfrac{2\omega_0}{R} = \dfrac{4}{3R\omega_0}$: $\boxed{C_3 = \dfrac{4}{3R\omega_0}}$

4. On veut cette fois un comportement passe-haut (afin de garder les aigus et de filtrer le reste), le même type d'analyse qu'en Q19 conduit bien à prévoir ce comportement.
Une démarche possible est de calculer l'impédance équivalente à L_3//(R+C_2), puis d'utiliser le pont diviseur de tension avec cette impédance et C_1 pour obtenir la tension aux bornes de L_3 (et de R en série avec C_2) puis de conclure avec un second pont diviseur de tension avec R et C_2.

PROBLEME III

1. Parce que la tension en créneaux peut être décomposée en une somme de fonctions sinusoïdales (analyse de Fourier).

2. En BF, la bobine est équivalente à un interrupteur fermé. Alors, $v_2=v_1$

En HF, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé. Alors, $v_2=0$.

On peut donc penser qu'il s'agit d'un filtre passe bas.

3. Il s'agit de l'impédance vue de l'entrée. $\underline{Z_e} = \underline{Z_L} + \underline{Z_C} // \underline{Z_R}$.

$$\underline{Z_C} // \underline{Z_R} = \frac{R/jC\omega}{R+1/jC\omega} = \frac{R}{1+jRC\omega}. \quad \text{Donc} \quad \underline{Z_e} = jL\omega + \frac{R}{1+jRC\omega}.$$

4.a
$$\underline{H} = \frac{\underline{Z_C}//\underline{Z_R}}{\underline{Z_L}+\underline{Z_C}//\underline{Z_R}} = \frac{R/(1+jRC\omega)}{jL\omega + \frac{R}{jRC\omega+1}} = \frac{R}{R+jL\omega(1+jRC\omega)} = \frac{1}{1+j\frac{L\omega}{R}-LC\omega^2}$$

Soit $\underline{H} = \dfrac{1}{1-x^2+jQx}$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R}$

4.b $G = |\underline{H}| = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+(Qx)^2}}$, $G_{dB} = 20\log G = -10\log\left((1-x^2)^2+(Qx)^2\right)$

$$\phi = \arg(\underline{H}) = -\arctan\left(\frac{Qx}{1-x^2}\right)\left(+/- \pi\right)$$

5.a La fréquence de coupure est obtenue pour $G = \dfrac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

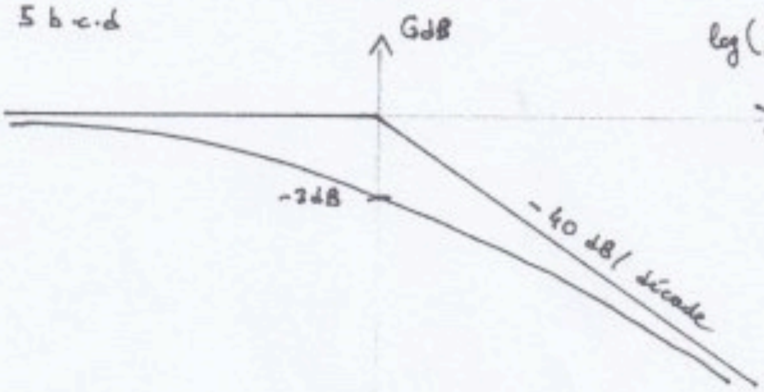
D'où $(1-x^2)^2+(Qx)^2 = 2$, soit $x^4+x^2(Q^2-2)-1=0$

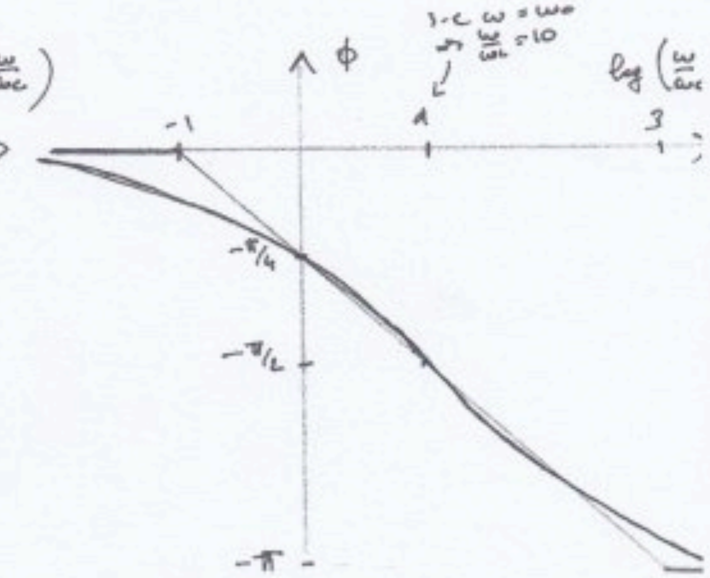
D'où $x^2 = \dfrac{(2-Q^2)+\sqrt{(2-Q^2)^2+4}}{2} = 1-\dfrac{Q^2}{2}+\sqrt{\left(1-\dfrac{Q^2}{2}\right)^2+1}$ (on veut $x^2>0$)

Et donc $x = \sqrt{1-\dfrac{Q^2}{2}+\sqrt{\left(1-\dfrac{Q^2}{2}\right)^2+1}}$ $\quad$ A.N : $x = 0,1$.

D'où $\underline{\omega_c \simeq 0,1\,\omega_0}$.

5 b.c.d





6.a. Il s'agit de la pulsation des créneaux. $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \simeq 6{,}28 \cdot 10^4$ rad/s.

6.b $\langle v_1 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T v_1(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(T f E + (T - Tf)\cdot 0\right) = \frac{\alpha T E}{T} = \alpha E$. A.N : $\langle v_1 \rangle = 7{,}5$ V

6.c $V_{1eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v_1^2(t)\,dt} = \sqrt{\alpha E^2} = \sqrt{\alpha}\,E$ (calcul analogue ...) A.N : $V_{1eff} = 8{,}7$ V.

7.a Quel que soit n, $\langle \cos(n\omega t + \varphi_n) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \cos(n\omega t + \varphi_n)\,dt = 0$ $\left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$.

Donc $\langle v_1 \rangle = A_0$.

7.b on trouve $A_1 = -3{,}2$ V ; $B_1 = 3{,}2$ V ; $A_2 = 0$ V et $B_2 = 3{,}2$ V.

7.c $C_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = C_n \cos\varphi \cos(n\omega t) - C_n \sin\varphi \sin(n\omega t) = A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)$

D'où $\frac{C_n \sin\varphi_n}{C_n \cos\varphi_n} = -\frac{B_n}{A_n}$, donc $\tan\varphi_n = -\frac{B_n}{A_n}$

7.d $C_1 \simeq 4{,}5$ V . $C_2 \simeq 3{,}2$ V $\varphi_1 = -\arctan(-1) - \pi = -\frac{3\pi}{4}$.

$\varphi_2 = -\text{"}\arctan(\infty)\text{"} = -\pi/2$

7.e $v_1(t) = 7{,}5 + 4{,}5\cos(\omega t - 3\pi/4) + 3{,}2\cos(2\omega t - \pi/2)$ volts.

8.a Sur la linéarité du filtre.

8.b $\langle v_2 \rangle$ sera égale à sa composante continue. Or, le gain est égal à 1 pour une tension continue, donc la composante continue de v_2 est égale à A_0.

8.c On veut $G(\omega) = \frac{1}{10}$ (-20 dB $\Leftrightarrow \times 1/10$)

Donc $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + (Qx)^2}} = \frac{1}{10}$, soit $(1-x^2)^2 + (Qx)^2 = 100$

D'où $x^4 + x^2(-2+100) + 1 - 100 = 0$, soit $x^4 + 98x^2 - 99 = 0$.

Cela conduit à $x = 1$. Donc on veut $\omega_0 = \omega$: il faut que le ω_0 du circuit soit égal à la pulsation des créneaux. Donc $\omega_0 = 6{,}28 \cdot 10^4$ rad/s.

8.d $Q = \frac{L\omega_0}{R}$. Donc $L = \frac{QR}{\omega_0} \simeq 11$ mH. Alors, $C = \frac{1}{L\omega_0^2} \simeq 23$ nF.

8.e Le fondamental est atténué de 20 dB, donc l'amplitude du fondamental de v_2 est 1/10 de celle du fondamental de v_1. Soit $0{,}45$ V.

Pour le 1er harmonique, il faut calculer $G(2\omega) \simeq \frac{1}{20}$, donc l'amplitude du 1er harmonique de v_2 vaut environ $0{,}16$ V.

8.f Les déphasages valent respectivement ($n=1$ et $n=2$) $-\pi/2$ et $-98{,}5°$

Les phases en sortie sont donc respectivement de $-\frac{\pi}{4}$ et $8{,}5° = 0{,}15$ rad

8.g $v_2(t) = 7{,}5 + 0{,}45\cos(\omega t - \pi/4) + 0{,}16\cos(2\omega t + 0{,}15)$ volts

8.h $v_2(t)$ est quasiment une tension continue ...