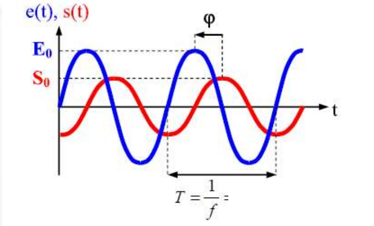
1

Introduction

L'analyse fréquentielle d'un système s'intéresse à la réponse du système à une sollicitation périodique. Elle permet de prévoir son comportement lorsqu'il est soumis à des entrées sinusoïdales.

Ceci est indispensable car de nombreux systèmes sont soumis à des entrées sinusoïdale dans la réalité, et il faut souvent atténuer ses oscillations.

Lorsque l'entrée d'un SLCI est un signal sinusoïdal $e_{(t)} = e_0.\sin(\omega.t)$, il faut chercher une sortie en régime permanent sous la forme : $s_{(t)} = s_0.\sin(\omega.t + \varphi)$



2

Introduction

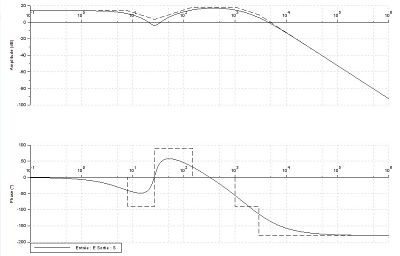
Les réponses harmoniques sont caractérisées par deux grandeurs :

- Le gain G qui est le rapport des amplitudes $\frac{s_0}{e_0}$,
- La phase qui est de le déphasage entre $s_{(t)}$ et $e_{(t)}$.

$e_{(t)}$ et $s_{(t)}$ sont valables pour une valeur particulière de ω, le gain et la phase seront donc valable pour une valeur particulière de ω.

L'objectif d'une étude fréquentielle est d'étudier l'évolution du Gain et de la Phase en fonction de ω.

Pour $\omega = 10\,rad/s$:
$G = 8{,}5dB = 2{,}66 \quad \varphi = -45°$
Pour $\omega = 100\,rad/s$:
$G = 12{,}5dB = 4{,}22 \quad \varphi = 45°$
Pour $\omega = 1000\,rad/s$:
$G = 14{,}6dB = 5{,}37 \quad \varphi = -55°$
Pour $\omega = 10000\,rad/s$:
$G = -13dB = 0{,}22 \quad \varphi = -157°$



3

Méthode

On utilise la méthode des complexes, $H_{(j\omega)}$ correspond à la fonction de transfert dans laquelle "p" a été remplacé par "$j\omega$" .

$H_{(j\omega)}$ représentera donc le comportement fréquentiel du système ayant pour fonction de transfert $H_{(p)}$.

On a donc :

- Le gain : $G = \frac{s_0}{e_0}$ qui est égal au module de $H_{(j\omega)}$,
- La phase : φ qui est égale à l'argument de $H_{(j\omega)}$.

Soit :

- $\frac{s_0}{e_0} = |H_{(j\omega)}|$ et,
- $\varphi = arg(H_{(j\omega)})$.

4

Lieu de transfert

On appelle lieu de transfert toute représentation graphique du comportement fréquentiel de $H_{(j\omega)}$ à l'aide de graphiques. Pour réaliser le tracé, il faut factoriser le numérateur et le dénominateur de $H_{(j\omega)}$ afin de décomposer $H_{(j\omega)}$ en un produit de fonctions élémentaires bien connues et facile à tracer.

- Le module de $H_{(j\omega)}$ est alors le produit des modules de chaque fonction élémentaire,
- L'argument de $H_{(j\omega)}$ est alors la somme des arguments de chaque fonction élémentaire.

Gain pur — Produit d'inverses de 1[er] ordre — Produit d'inverses de 2[ème] ordre

$$H(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^{\alpha}}\cdot\frac{\prod_m (1+T_m.j\omega)}{\prod_n (1+T_n.j\omega)}\cdot\frac{\prod_k\left[1+\frac{2.z_k}{\omega_{0k}}.j\omega+\left(\frac{1}{\omega_{0k}}.j\omega\right)^2\right]}{\prod_p\left[1+\frac{2.z_p}{\omega_{0p}}.j\omega+\left(\frac{1}{\omega_{0p}}.j\omega\right)^2\right]}$$

Intégrateur — Produit de système de 1[er] ordre — Produit de système de 2[ème] ordre

Diagramme de Bode

Dans un diagramme de Bode, l'échelle en dB du module permettra de transformer le produit en somme (log).

On tracera donc séparément les diagrammes de Bode de chaque facteur, puis on sommera les arguments et les modules pour obtenir le diagramme de Bode final de la fonction de transfert.

Exemple : $H_{(p)}=\frac{10+5.p}{p+1{,}05.p^2+0{,}05.p^3}=\frac{10(1+0{,}5.p)}{p.(1+p).(1+0{,}05.p)}$

$H_{(p)}=\frac{10}{p}.\frac{1}{(1+p)}.(1+0{,}5.p).\frac{1}{(1+0{,}05.p)}$

Gain + Intégrateur

1[er] ordre $\tau=1s$

1[er] ordre inverse $\tau=0{,}5s$

1[er] ordre $\tau=0{,}05s$

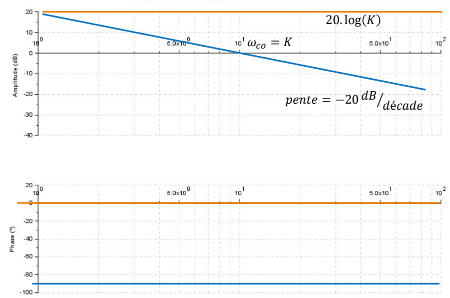
On a donc :

$H_{(p)}=H_{1(p)}.H_{2(p)}.H_{3(p)}.H_{4(p)}$

$20.log|H_{(j\omega)}|=20.log|H_{1(j\omega)}|+20.log|H_{2(j\omega)}|+20.log|H_{3(j\omega)}|+20.log|H_{4(j\omega)}|$

$\arg(H_{(j\omega)})=\arg(H_{1(j\omega)})+\arg(H_{2(j\omega)})+\arg(H_{3(j\omega)})+\arg(H_{4(j\omega)})$

Gain pur et intégrateur



- Gain pur :

$H_{(p)}=K\ \Rightarrow H_{(j\omega)}=K$

$|K|=K$

Gain : $G_{dB}=20.\log(K)$

$\arg(K)=\arctan\left(\frac{Im}{Re}\right)\Rightarrow\varphi=0°$

- Intégrateur :

$H_{(p)}=\frac{K}{p}\Rightarrow H_{(j\omega)}=\frac{K}{j\omega}$

$G_{dB}=20log\left|\frac{K}{j\omega}\right|\Rightarrow$

$G_{dB}=20\log(K)-20\log(\omega)$

$\varphi=\arg\left(\frac{K}{j\omega}\right)=\arg(K)-\arg(j\omega)=0°-\arctan\left(\frac{Im}{Re}\right)\Rightarrow\varphi=-90°$

- ω de coupure, ω_{co} :

$G_{dB}=20\log(K)-20\log(\omega)=0$ pour $\omega=K$

ω_{co}, quand le gain en dB est nul, donc pour $\omega=K$

Gain pur et intégrateur

- Calcul de la pente de la courbe de gain :

On va déterminer la pente en calculant la différence de module entre deux décades.

$pente=G_{dB}\left(\frac{K}{10j\omega}\right)-G_{dB}\left(\frac{K}{j\omega}\right)$

$pente=20.\log(K)-20.\log(10.\omega)-20.\log(K)+20.\log(\omega)$

$pente=20.\log\left(\frac{\omega}{10.\omega}\right)=-20.log(10)$

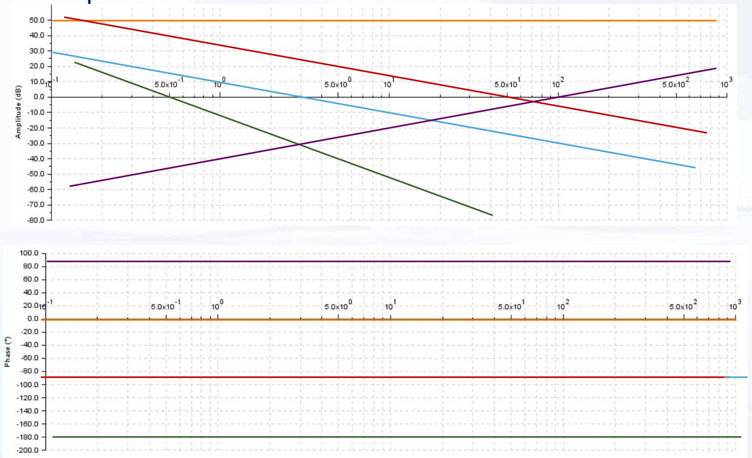
$pente=-20\ {}^{dB}/_{décade}$

- Exercices :

Sur le document ci-après tracez les fonctions suivantes :

$H_{(p)}=310, H_{(p)}=\frac{50}{p}, H_{(p)}=\frac{3}{p}, H_{(p)}=\frac{0{,}25}{p^2}, H_{(p)}=0{,}01.p$

Exemple



9

1^er^ Ordre

$H_{(p)} = \frac{K}{1+\tau.p} \Rightarrow H_{(j\omega)} = \frac{K}{1+\tau.j\omega}$

➢ Gain :

$\left|\frac{K}{1+\tau.j\omega}\right| = \frac{|K|}{|1+\tau.j\omega|} = \frac{K}{\sqrt{1+\tau^2.\omega^2}}$

$G_{dB} = 20.\log(K) - 20.\log\left(\sqrt{1+\tau^2.\omega^2}\right)$

➢ Phase :

$\arg\left(\frac{K}{1+\tau.j\omega}\right) = \arg(K) - \arg(1+\tau.j\omega)$

$\varphi = -\arctan\left(\frac{Im}{Re}\right) = -\arctan(\tau.\omega)$

➢ Asymptotes :

$Pour\ \omega \to 0 : H_{(j\omega)} \approx K \Rightarrow G_{dB} \to 20.\log(K)\ \ et\ \varphi \to 0°$

$Pour\ \omega \to +\infty : H_{(j\omega)} \approx \frac{K}{\tau.j\omega} \Rightarrow$

- $G_{dB} \approx 20.\log\left(\frac{K}{\tau}\right) - 20.\log(\omega) \xrightarrow[\omega\to+\infty]{} -\infty$
- $\varphi \approx -\arctan(\tau.\omega) \xrightarrow[\omega\to+\infty]{} -90°$

10

1^er^ Ordre

$H_{(p)} = \frac{K}{1+\tau.p} \Rightarrow H_{(j\omega)} = \frac{K}{1+\tau.j\omega}$

➢ Valeur particulière à la pulsation de cassure ω_c :

On pose : $\omega_c = \frac{1}{\tau}$

- $G_{dB} = 20.\log(K) - 20.\log(\sqrt{1+1}) \Rightarrow G_{dB} = 20.\log(K) - 3\text{dB}$
- $\varphi = -\arctan(1) \Rightarrow \varphi = -45°$

➢ Pente :

Même démonstration que pour l'intégrateur.

➢ Exemple :

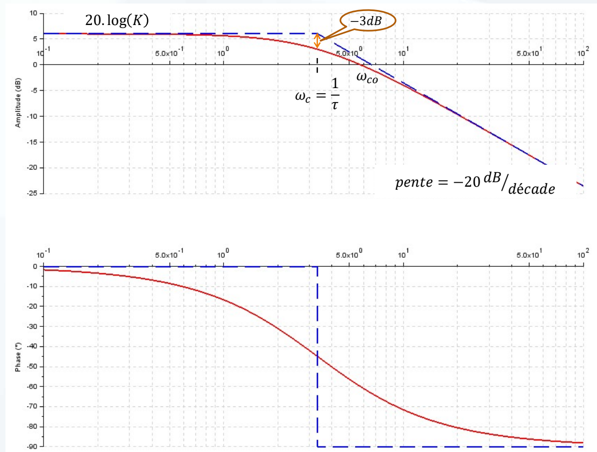
Tracez les fonction suivantes :

$H_{1(p)} = \frac{20}{1+2p}, H_{2(p)} = \frac{3}{1+0{,}5p}, H_{3(p)} = H_{1(p)} * H_{2(p)} = \frac{20*3}{(1+2p)*(1+0{,}5p)}$

$H_{4(p)} = 0{,}05 * (1+0{,}2p)$

11

1^er^ Ordre diagramme de bode



12

Cours : Rép. fréquentielle — Rep. des facteurs élémentaires

Exemple :

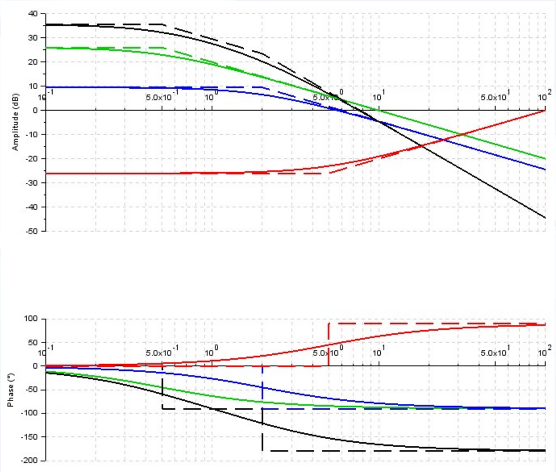
$H_{1(p)} = \frac{20}{1+2p}$

$H_{2(p)} = \frac{3}{1+0{,}5p}$

$H_{3(p)} = H_{1(p)} * H_{2(p)}$

$H_{3(p)} = \frac{20*3}{(1+2p)*(1+0{,}5p)}$

$H_{4(p)} = 0{,}05 * (1+0{,}2p)$



13

Cours : Rép. fréquentielle — Rep. des facteurs élémentaires

$2^{\text{ième}}$ Ordre $\xi \geq 1$ ou $z \geq 1$

- $z > 1$:

La fonction possède 2 pôles réels p_1 et p_2 $\Rightarrow$ $produit\ de\ deux\ 1er\ ordre$

$H_{(p)} = \frac{K}{(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)}$

- $z = 1$:

La fonction possède une racine double

$H_{(p)} = \frac{K}{(1+\tau.p)^2}$ $avec$ $\tau = \frac{1}{\omega_0}$

ω_0: pulsation propre du système

- Exemple

Tracez les deux fonctions suivantes :

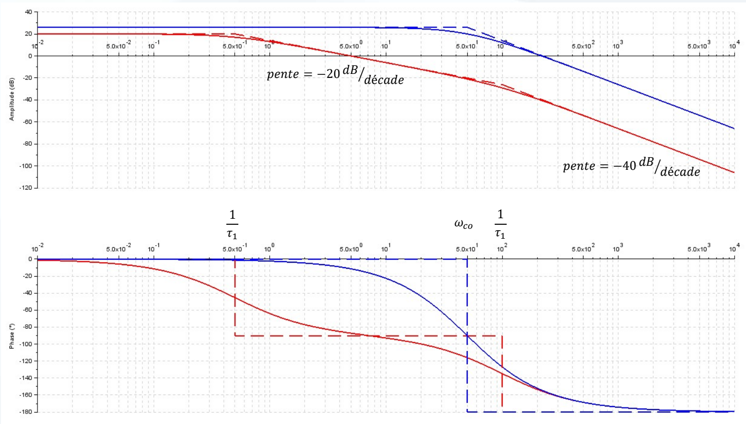
$H_{1(p)} = \frac{10}{(0{,}02.p^2+2{,}01.p+1)} = \frac{10}{(2.p+1).(0{,}01.p+1)}$

$H_{2(p)} = \frac{20}{(0{,}2.p+1)^2}$

14

Cours : Rép. fréquentielle — Rep. des facteurs élémentaires

$2^{\text{ième}}$ Ordre $\xi \geq 1$ ou $z \geq 1$



15

Cours : Rép. fréquentielle — Rep. des facteurs élémentaires

$2^{\text{ième}}$ Ordre $\xi < 1$ ou $z < 1$

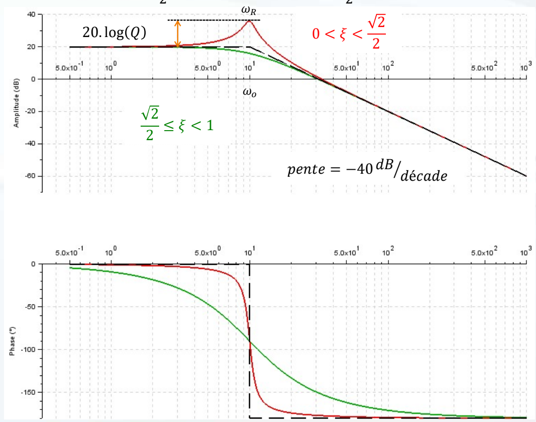
Il faudra distinguer deux cas : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \xi < 1$ et $0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Coefficient de surtension :

$Q = \frac{1}{2.\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

Pulsation de résonnance :

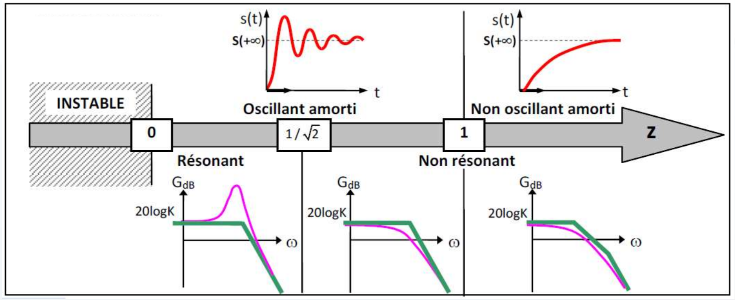
$\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$



16

Méthode de construction

1. Factoriser $H_{(p)}$,
2. Classer les constantes de temps dans l'ordre décroissant,
3. Construire le tracer asymptotique du gain ou intégrateur puis des autres fonctions en avançant dans le sens des pulsations croissantes,
4. Approximer le tracé réel si demandé.



17

Exemple :

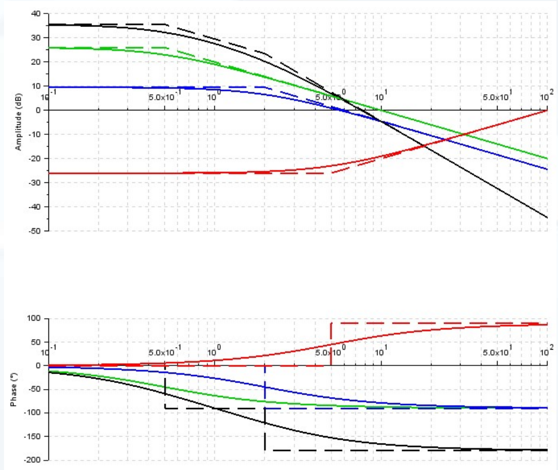
$H_{1(p)} = \frac{20}{1+2p}$

$H_{2(p)} = \frac{3}{1+0{,}5p}$

$H_{3(p)} = H_{1(p)} * H_{2(p)}$

$H_{3(p)} = \frac{20*3}{(1+2p)*(1+0{,}5p)}$

$H_{4(p)} = 0{,}05 * (1 + 0{,}2p)$



18

Exemple 1

Soit la fonction de transfert : $H_{1(p)} = \frac{20}{1+2p}$

Déterminez ω_{co}, $\omega_{\varphi=-60°}$, K pour avoir $\varphi_{\omega_{co}} = -60°$

➢ Détermination de ω_{co}

$\left|\frac{20}{1+2.j\omega}\right| \Rightarrow G_{dB} = 20.\log(20) - 20.\log(\sqrt{1+4.\omega^2})$

$Pour\ \omega_{co} : G_{dB} = 0 = 20.\log(20) - 20.\log\left(\sqrt{1+4.\omega_{co}^2}\right) \Rightarrow 20 = \sqrt{1+4.\omega_{co}^2}$

$\omega_{co} = \sqrt{\frac{400-1}{4}} \Rightarrow \omega_{co} = 9{,}99\ rad/s$

➢ Détermination de $\omega_{\varphi=-60°}$

$\arg\left(\frac{20}{1+2.j\omega}\right) = \arg(20) - \arg(1+2.j\omega) \Rightarrow \varphi = -\arctan(2.\omega)$

$Pour\ \omega_{\varphi=-60} : \varphi = -60 = -\arctan(2.\omega)$

$\omega_{\varphi-60} = \frac{\tan(60)}{2} \Rightarrow \omega_{\varphi-60} = 0{,}87\ rad/s$

19

Exemple 1

$H_{1(p)} = \frac{20}{1+2p}$

➢ Détermination de K pour $\varphi_{\omega_{co}} = -60°$

Cela revient à baisser la courbe de gain pour que la pulsation de coupure soit pour $\varphi = -60°$.

En effet si le gain K varie, l'asymptote du gain pour $\omega \to 0$ va monter ou descendre.

Par contre, cela influence pas la courbe de phase qui ne dépend que ω_c.

On veut : $\varphi_{\omega_{co}} = -60°\ donc\ :\ G_{dB\omega_{\varphi-60}} = 0$

$20.\log(K) - 20.\log\left(\sqrt{1+4.\omega_{\varphi-60}^2}\right) = 0$

$K = \sqrt{1+4.\omega_{\varphi-60}^2} = \sqrt{1+4.0{,}87^2} \Rightarrow K = 2$

20

Cours : Rép. fréquentielle — Calcul de valeurs particulières

Exemple 2

Soit la fonction de transfert : $H_{3(p)} = \frac{20*3}{(1+2p)*(1+0,5p)}$

Déterminez ω_{co}, $\omega_{\varphi=-120°}$, K pour avoir $\varphi_{\omega_{co}} = -120°$

➢ Détermination de ω_{co}

$|H_{3(p)}| \Rightarrow G_{dB} = 20.\log(60) - 20.\log(\sqrt{1+4.\omega^2}) - 20.\log\left(\sqrt{1+0,25.\omega^2}\right)$

$Pour\ \omega_{co} : G_{dB} = 0 = 20.\log(60) - 20.\log\left(\sqrt{1+4.\omega_{co}^2}\right) - 20.\log\left(\sqrt{1+0,25.\omega_{co}^2}\right)$

$10^{2.log60} = (1+4.\omega_{co}^2).(1+0,25.\omega_{co}^2) = 3600\ on\ pose\ \omega_{co}^2 = x$

$x^2 + 4,25.x - 3599 = 0 \Rightarrow x_1 = 57,9\ et\ x_2 = -62,15 \Rightarrow \omega_{co} = 7,68\,rad/s$

➢ Détermination de $\omega_{\varphi=-120°}$

$\varphi = -\arctan(2.\omega) - \arctan(0,5.\omega) = -120°$

$\frac{2.\omega+0,5.\omega}{1-2.\omega.0,5.\omega} = \tan(120) = -1,73 \Rightarrow 1,73.\omega^2 - 2,5.\omega - 1,73 = 0 \Rightarrow \omega = 1,96\,rad/s$

$On\ a\ \omega_{\varphi-120} = 1,96\,rad/s$

SI Pothier 21

21

Cours : Rép. fréquentielle — Calcul de valeurs particulières

Exemple 2

$H_{3(p)} = \frac{20*3}{(1+2p)*(1+0,5p)}$

➢ Détermination de K pour $\varphi_{\omega_{co}} = -120°$

On veut : $\varphi_{\omega_{co}} = -120°\ donc\ :\ G_{dB\,\omega_{\varphi-120}} = 0$

$20.\log(K) - 20.\log\left(\sqrt{1+4.\omega_{\varphi-120}^2}\right) - 20.\log\left(\sqrt{1+0,25.\omega_{\varphi-120}^2}\right) = 0$

$K = \sqrt{1+4.\omega_{\varphi-120}^2}.\sqrt{1+0,25.\omega_{\varphi-120}^2}$

$K = \sqrt{1+4.1,96^2}.\sqrt{1+0,25.1,96^2} \Rightarrow K = 5,66$

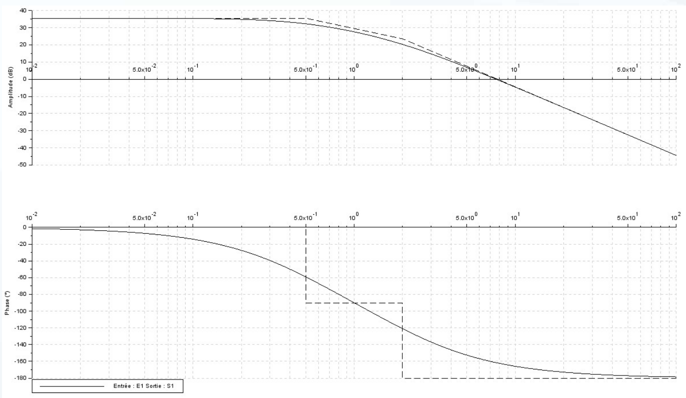
SI Pothier 22

22

Cours : Rép. fréquentielle — Calcul de valeurs particulières

Exemple 2

$H_{3(p)} = \frac{20*3}{(1+2p)*(1+0,5p)}$



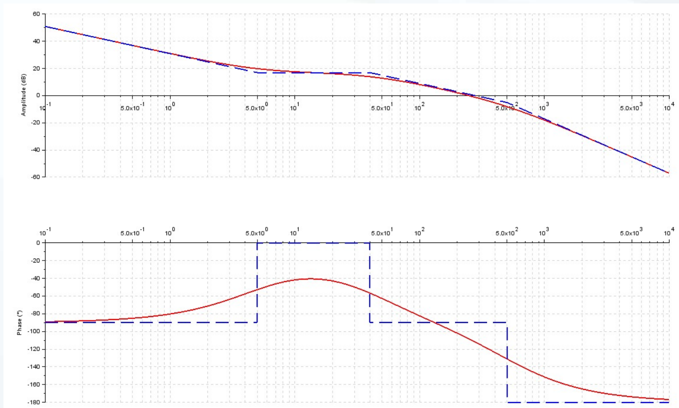
SI Pothier 23

23

Cours : Rép. fréquentielle — Tracé

Exemple 1

Réalisez le tracé dans le plan de Bode de la fonction : $H_{10(p)} = \frac{35.(1+0,2p)}{(5.10^{-5}p^3+0,027p^2+p)}$



SI Pothier 24

24