Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 4 : 30 septembre au 4 octobre 2024

Questions de cours

Chaque semaine, le colleur peut demander en question de cours de citer un théorème, une propriété, une définition de son choix (en particulier, toutes les propriétés des projecteurs et des symétries). Il peut aussi piocher dans la liste suivante :

- ☐ Montrer qu'une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.
- ☐ Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de u, de multiplicité notée $m(\lambda)$ et de sous-espace propre associé noté $E_\lambda(u)$.
  Montrer que $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$.
- ☐ Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On pose $u \in \mathcal{L}(E)$ et on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres (distinctes). Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k}(u) \leqslant n$ et en déduire que $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u)) \leqslant n$.
- ☐ Définir le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ puis montrer que
$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$
- ☐ Montrer que si P est un polynôme annulateur de u, alors tout multiple de P est annulateur de u.
- ☐ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $d = \deg(\pi_u)$. Montrer que $\mathbb{K}[u]$ est de dimension d et que $(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{d-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Chapitre 4 : Valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

I Premières propriétés

I.1 Sous-espaces stables

- définition, exemples.
- si u et v commutent, alors $\mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont stables par u.
- restriction d'un endomorphisme à un sous-espace vectoriel, endomorphisme induit.
- sous-espaces stables et matrices par blocs.

I.2 Éléments propres

- valeur propre, vecteur propre, spectre d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée.
- exemples : projecteurs, symétries, endomorphismes nilpotents, homothéties.
- sous-espaces propres.
- si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

I.3 Rechercher les valeurs propres

- $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ si et seulement si $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas injectif.
  En dimension finie : $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ si et seulement si $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ n'est pas bijectif.
- $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si $\mathrm{rg}(A - \lambda\,\mathrm{I}_n) < n$.
- spectre des matrices triangulaires.
- deux matrices semblables ont le même spectre.
- si A est une matrice réelle, et si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de A.

I.4 Sous-espaces propres en somme directe

- les sous-espaces propres sont en somme directe.
- toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.
- si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\sum\limits_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_k}(u)) \leqslant \dim(E)$.
- le nombre de valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ est inférieur ou égal à $\dim(E)$. Le nombre de valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est inférieur ou égal à n.

II Polynôme caractéristique

II.1 Définition et premières propriétés

- polynôme caractéristique χ_u d'un endomorphisme, polynôme caractéristique χ_A d'une matrice carrée.
- A et A^T ont le même polynôme caractéristique.
- deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
- degré, coefficient dominant, coefficients de degrés 0 et $n-1$ du polynôme caractéristique.
- polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.
- polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.

II.2 Exemple de la matrice compagnon

- matrice compagnon d'un polynôme unitaire.
- si A est la matrice compagnon de P, alors le polynôme caractéristique de A est P.

II.3 Lien avec les valeurs propres

- les racines du polynôme caractéristique χ_u sont les valeurs propres de u.
- multiplicité d'une valeur propre. On a $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m(\lambda)$.
- pour une matrice réelle, la multiplicité de λ est égale à la multiplicité de $\overline{\lambda}$.
- si χ_u est scindé, la trace de u est la somme des valeurs propres comptées avec leurs multiplicités et le déterminant de u est le produit des valeurs propres comptées avec leurs multiplicités.

III Polynôme minimal

III.1 Définition

- si E est de dimension finie, il existe un polynôme annulateur non nul de u.
- définition du polynôme minimal π_u d'un endomorphisme, π_A d'une matrice. Il divise tout polynôme annulateur.
- le polynôme minimal est le polynôme annulateur unitaire de plus bas degré.
- si on note $d = \deg(\pi_u)$, alors $(\mathrm{id}_E, u, \ldots, u^{d-1})$ forme une base de $\mathbb{K}[u]$. Idem pour les matrices.

III.2 Lien avec les valeurs propres

- si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur.
- les racines de π_u sont les valeurs propres de u.

III.3 Théorème de Cayley-Hamilton

- le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.
- le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

III.4 Lemme de décomposition des noyaux

- lemme des noyaux. Application aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, aux équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.
- définition des sous-espaces caractéristiques.
- si le polynôme caractéristique est scindé, alors E est égale à la somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.

Hors programme cette semaine :

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées.