Synthèse : Résolution statique d'un système

Le Principe Fondamental de la Statique (PFS) est un cas particulier du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD).

Pour le PFS, la variation de vitesse d'un solide dans un référentiel galiléen est nulle. Pour le PFD, cette variation de vitesse ne le sera pas.

1. Notion d'isolement

Isoler un système de solides, c'est définir une frontière séparant ce qui est intérieur au système de ce qui est considéré comme extérieur en vue de faire le bilan des actions mécaniques extérieures agissant sur le système.

Remarque : Un graphe de liaisons préalablement réalisé sur lequel vous rajoutez les actions mécaniques internes et externes, peut ici vous aider à faire l'isolement et donc à définir la frontière et les solides en liaison. On parle alors de graphe d'analyse ou de structure.

2. La modélisation des actions mécaniques (AM)

On appelle action mécanique toute cause susceptible de maintenir un solide au repos, de créer un mouvement ou de déformer un solide (ou ensemble de solides).

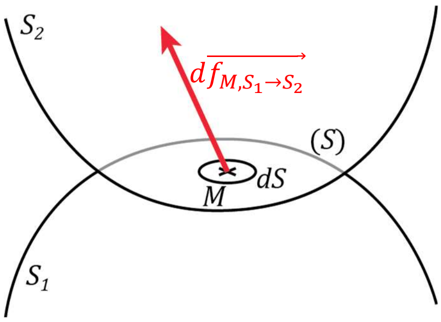
2.1. Modélisation locale-globale des AM

Localement, une action mécanique agit en tout point du système considéré (action volumique, à distance) ou en tout point d'une surface (action surfacique, de contact).

Une première modélisation consiste donc à introduire un vecteur densité de force défini $\overrightarrow{f_{M,S_1\to S_2}}$ sur une surface dS ou un volume dV suivant le type d'action mécanique.

Par intégration, il est possible de modéliser une action mécanique par un torseur des actions mécaniques (modélisation globale).

<table>
<tr><th>Modèle local</th><th>Modèle global</th></tr>
<tr><td>
Ex : action mécanique de contact



$\overrightarrow{f_{M,S_1\to S_2}}$ densité de force en M de S_1 sur S_2 (dirigée vers S_2)

$$\overrightarrow{df_{M,S_1\to S_2}} = \overrightarrow{f_{M,S_1\to S_2}}.dS$$
</td><td>

$$\{\mathcal{T}_{S_1\to S_2}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{S_1\to S_2}} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{df_{M,S_1\to S_2}} \\ \overrightarrow{M_{A,S_1\to S_2}} = \displaystyle\int_{M\in S} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{df_{M,S_1\to S_2}} \end{matrix}\right\}_A$$

$\overrightarrow{R_{S_1\to S_2}}$ résultante des AM de S_1 sur S_2

$\overrightarrow{M_{A,S_1\to S_2}}$ moment en A des AM de S_1 sur S_2

$$\{\mathcal{T}_{S_1\to S_2}\} = \left\{\begin{matrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{matrix}\right\}_{(A,\vec{x}_i,\vec{y}_i,\vec{z}_i)}$$

$\overrightarrow{R_{S_1\to S_2}}$ $\overrightarrow{M_{A,S_1\to S_2}}$
</td></tr>
</table>

2.2. Modèle de Coulomb

La loi de frottement de Coulomb relie localement les composantes normale et tangentielle du vecteur densité de force soit

$$\overrightarrow{f_{M,S_1\to S_2}} = F_N(M).\vec{n} + F_T(M).\vec{t}$$

avec $\vec{n}$ la normale au contact et $\vec{t}$ le vecteur tangentiel opposé au mouvement donc à $\overrightarrow{V_{M\in S_2/S_1}}$

Deux cas sont à envisager :

- Si adhérence : $\begin{cases} \overrightarrow{V_{M\in S_2/S_1}} = \vec{0} \\ |F_T| \leq f.|F_N| \end{cases}$
- Si glissement : $\begin{cases} F_T(M).\vec{t} \text{ opposé à } \overrightarrow{V_{M\in S_2/S_1}} \text{ et de même direction} \\ |F_T| = f.|F_N| \end{cases}$

avec f le coefficient de frottement donc la valeur dépend des caractéristiques de contact (couple de matériaux, état de surface, lubrification) ; valeurs communément comprises entre 0,1 et 0,6.

Le vecteur densité de force ne peut pas sortir d'un cône de demi-angle au sommet φ tel que $f = \tan\varphi$.

Pour un contact ponctuel en M, le torseur des actions mécaniques s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{S_1\to S_2}\} = \begin{Bmatrix} F_N.\vec{n} + F_T.\vec{t} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_M$$

2.3. Torseur des actions mécaniques : cas des liaisons parfaites

Tout contact entre solides se fait avec frottement. Cependant, dans une première approche, on peut négliger l'influence du frottement et donc supposer qu'en tout point du contact entre les surfaces de liaison, les actions mécaniques élémentaires sont dirigées suivant les normales aux surfaces de contact

Quelles sont les conséquences de cette hypothèse sur les liaisons normalisées ?

La liaison ne dissipe alors pas d'énergie.

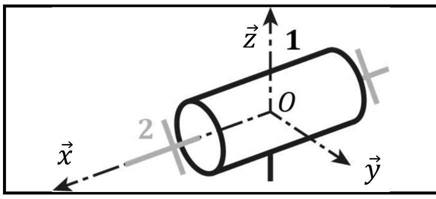
Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\} \otimes \{\mathcal{T}_{S_1\to S_2}\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall A, \overrightarrow{\Omega_{S_2/S_1}} \cdot \overrightarrow{M_{A,S_1\to S_2}} + \overrightarrow{R_{S_1\to S_2}} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S_2/S_1}} = 0$$

Le torseur des actions mécaniques est donc obtenu par dualité avec le torseur cinématique.

Exemple : Liaison pivot

	$\{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$	$\{\mathcal{T}_{S_1\to S_2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

3. Principe fondamental de la statique

Si S est un système de solide à l'équilibre dans un référentiel galiléen, alors :

$$\sum \{\mathcal{T}_{ext\to S}\} = \sum \{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\} = \{0\}$$

4. Principe des actions réciproques

Si un solide S_1 exerce sur un solide S_2 une action mécanique $\{\mathcal{T}_{S_1\to S_2}\}$, alors S_2 exerce l'action mécanique exactement opposée sur S_1 :

$$\{\mathcal{T}_{S_1\to S_2}\} = -\{\mathcal{T}_{S_2\to S_1}\}$$

5. Méthodologie de résolution d'un problème de statique

Compléter le graphe de liaisons en rajoutant les efforts extérieurs et associer mentalement (ou à l'écrit au brouillon) le torseur des actions mécaniques à chaque liaison du mécanisme. Suivant les indications du sujet, les liaisons peuvent être modélisées parfaites ou avec frottement. Certaines actions mécaniques peuvent être négligées (poids de certaines pièces, action d'un ressort, …)

Repérer l'objectif à atteindre, 2 possibilités en général :

- déterminer toutes les actions mécaniques des liaisons afin de les dimensionner ;
- rechercher un effort (dans une unique liaison, un effort moteur, etc.).

Enumérer les efforts connus (poids, effort extérieur résistant, etc.) et les efforts recherchés. Les autres actions mécaniques sont donc placées automatiquement dans la catégorie : « non recherchées ».

Objectif : trouver toutes les actions mécaniques

Il s'agit d'isoler l'ensemble des solides. Le bâti ne peut pas être isolé (des actions mécaniques indéterminables s'y appliquent).

En appliquant le principe fondamental de la statique à chacun des solides, on obtient un système d'équations comportant $6(p-1)$ équations avec p le nombre de solides qu'il s'agit de résoudre.

Objectif : rechercher une action mécanique particulière.

Il n'est pas forcément nécessaire d'écrire les 6 équations par solide issues de l'application du PFS.

Un isolement judicieux, le choix d'écrire une résultante ou un moment, ainsi qu'une projection adéquate permet d'aboutir au résultat rapidement.

Les aptitudes nécessaires à ce travail s'acquièrent par la pratique.

Voici quelques conseils :

L'idée maîtresse est de ne pas faire intervenir les inconnues d'actions mécaniques de liaisons « non recherchées » en rendant ces actions mécaniques internes à l'isolement ou en écrivant une projection suivant une direction où les liaisons présentent des composantes nulles en effort.

Si on recherche une résultante motrice permettant à un ensemble de solides de se déplacer en translation, Il s'agira d'écrire une équation de résultante en projection suivant la direction de déplacement.

Pour la recherche d'un couple moteur s'exerçant sur un ensemble de solides en rotation autour d'un axe fixe, il s'agira d'écrire une équation de moment en un point de l'axe de rotation en projection sur la direction de l'axe.

Dans ce cas, précisez : théorème de la résultante sur l'axe… ou théorème du moment sur l'axe…

Pour chaque isolement :

- Choisir un repère galiléen et supposer que l'isolement est en équilibre statique dans ce repère (ou se déplace en translation à une vitesse uniforme par rapport à ce référentiel)
- Effectuer le bilan des actions mécaniques
- Ecrire le PFS sous forme torsorielle et/ou vectorielle et/ou scalaire
- Résoudre et calculer les inconnues recherchées

5.1. Particularité d'un système soumis à l'action de 2 glisseurs (forces)

Le système (S) est soumis à deux forces : $\overrightarrow{F_A}$ appliquée en A et $\overrightarrow{F_B}$ appliquée en B. Le principe fondamental de la statique nous permet d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_A} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{F_B} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_B} \end{Bmatrix}_A = \{0\} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} = \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{F_B} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{F_A} = -\overrightarrow{F_B} \\ \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{F_B} \end{cases}$$

Lorsqu'un système en équilibre est soumis à deux forces, ces deux forces sont colinéaires, opposées et de même norme.

6. Les problèmes plans en statique

Lorsque dans un système mécanique les actions mécaniques sont toutes modélisées par des glisseurs coplanaires, on peut utiliser une méthode graphique pour résoudre le PFS.

Les torseurs des actions mécaniques ont alors la forme simplifiée suivante :

Problème dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \to S_2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & - \\ Y_{12} & - \\ - & N_{12} \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Problème dans le plan $(\vec{y}, \vec{z})$

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \to S_2}\} = \begin{Bmatrix} - & L_{12} \\ Y_{12} & - \\ Z_{12} & - \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Problème dans le plan $(\vec{x}, \vec{z})$

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \to S_2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & - \\ - & M_{12} \\ Z_{12} & - \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Les valeurs représentées par $-$ ne sont pas nécessairement nulles mais on n'en tient pas compte dans le problème étudié.

Les torseurs statiques des liaisons planes ont alors les formes suivantes :

Liaison pivot ou pivot glissant d'axe $(A, \vec{z})$ dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$:

$$\{\mathcal{T}_{S_1 \to S_2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & - \\ Y_{12} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

L'action de S_1 sur S_2 est donc modélisable par un glisseur passant par A.