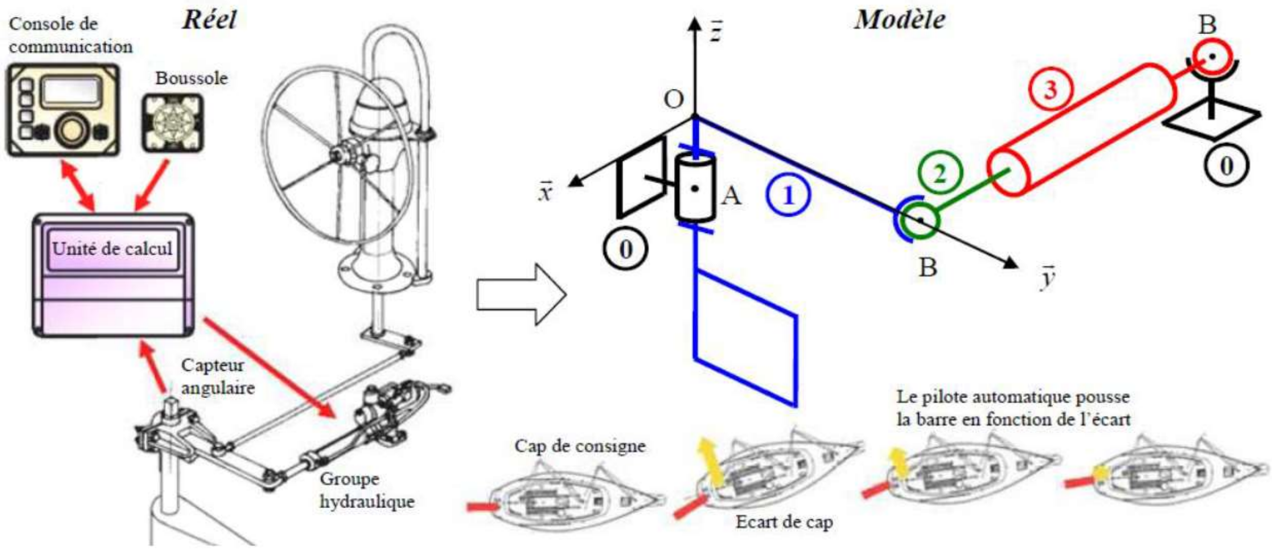
Résolution analytique des problèmes de statique (PFS)

Compétences

Modéliser :
- Réaliser l'inventaire des actions mécaniques agissant sur un solide ou un système de solides
- Appliquer le principe fondamental de la statique à un solide ou un système de solides

Résoudre :
- Choisir un modèle et une méthode de résolution (choix des isolements et théorèmes appliqués)
- Déterminer les actions mécaniques désirées



<u>Objectif :</u>

La statique étudie la relation de cause à effet entre l'équilibre relatif d'un système matériel et les actions mécaniques auxquelles ce système est soumis. L'objectif est de déterminer à partir des actions mécaniques connues les inconnus de liaison ainsi que la valeur des paramètres conduisant à des positions d'équilibre. Cette détermination permettra de dimensionner les éléments constituants les liaisons (paliers lisses, roulement, …) ou les actionneurs (moteurs, vérin, …).

On s'intéresse à un pilote automatique de voilier qui permet d'ajuster automatiquement le cap d'un bateau sans l'intervention du marin. L'ensemble gouvernail - barre franche, repéré **1**, est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ par rapport au voilier repéré **0**. Lorsque le pilotage est automatique, l'ensemble gouvernail barre franche est actionné par un vérin linéaire repéré (**2**+**3**).

1. Schéma d'architecture et graphe de structure

Le **schéma cinématique minimal** utilisé jusqu'à présent et que l'on construit en parallèle d'un **graphe des liaisons,** est un outil qui permet de modéliser un système réel dans le but de réaliser des **études cinématiques.** Il permet de visualiser les mouvements relatifs des différentes classes d'équivalence cinématique d'un mécanisme et ne tient pas compte de l'agencement des composants technologiques utilisés pour réaliser les différentes liaisons du mécanisme.

Un des objectifs des **problèmes de statique** étant de dimensionner les composants technologiques constituant les liaisons, l'outil schéma cinématique n'est donc pas adapté pour ces problèmes. On utilise par conséquent le **schéma d'architecture** qui permet de visualiser l'architecture d'un système et qui tient compte des composants technologiques. Il est construit en parallèle d'un **graphe de structure**.

Exemple du pilote automatique de bateau (Figure 1) :

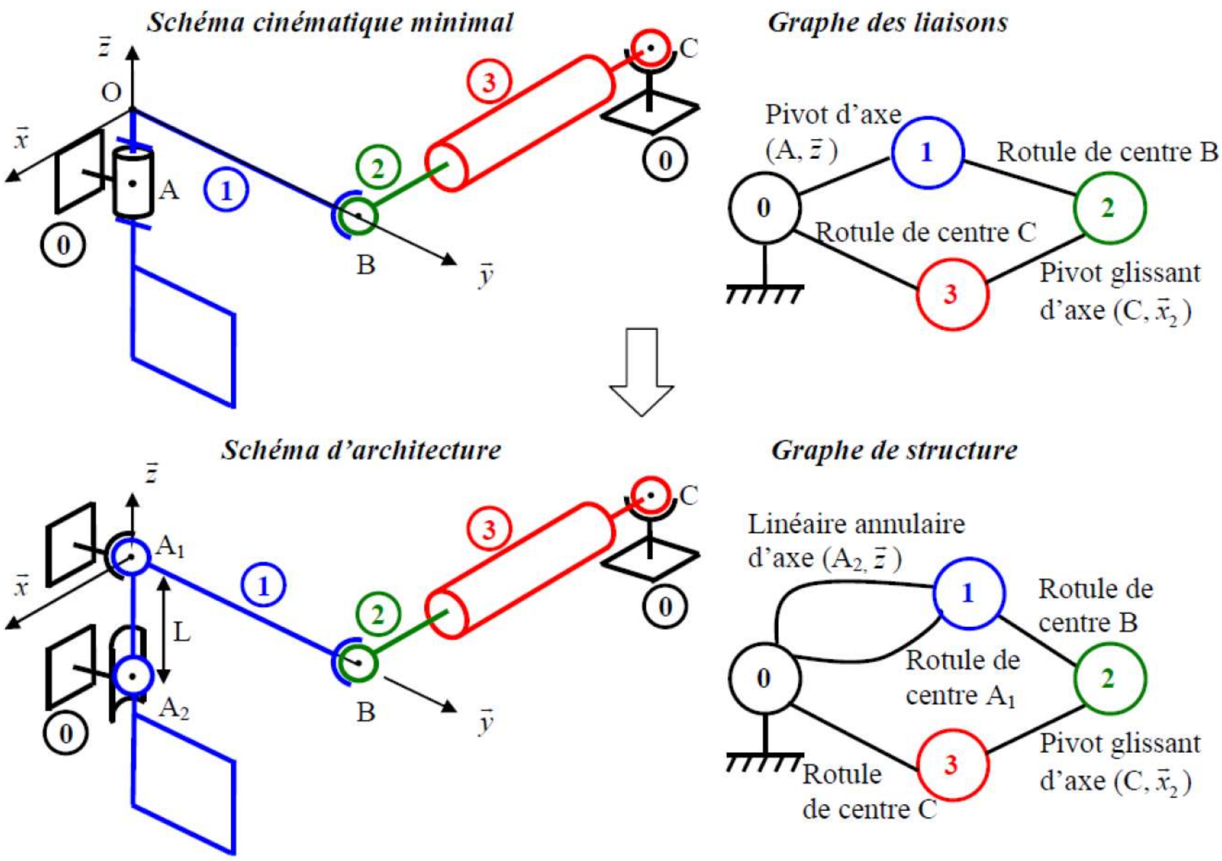


Figure 1. Schémas cinématique minimal et d'architecture et graphes associés

La liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ entre l'ensemble gouvernail - barre franche (1) et la coque du voilier (0) est un modèle adapté pour une étude cinématique. Il traduit le mouvement de $1/0$ observé sur le système réel. Dans le cas d'une étude statique, il faut tenir compte des composants technologiques utilisés pour réaliser cette liaison. En l'occurrence, on utilise deux roulements à billes à contact radial ayant pour centre de poussée respectifs les points A1 et A2 éloignés d'une distance L. On choisit donc de modéliser ces composants technologiques par une liaison rotule de centre A1 et une liaison linéaire annulaire en A2 d'axe $(A_2, \vec{z})$ ce qui permettra de déterminer les actions mécaniques sur chacun des centres de poussée des roulements et donc de dimensionner ces derniers.

2. Bilan des actions mécaniques extérieures, isolement d'un système matériel et graphe de structure

Les 2 éléments incontournables à considérer pour effectuer toute étude statique sont le bilan des actions mécaniques et l'isolement d'un système matériel à étudier *E* :

- Le **bilan des actions mécaniques extérieurs (BAME)** consiste à répertorier toutes les actions mécaniques qui sont susceptibles d'intervenir dans le problème (Ce 1er bilan est généralement donné dans les sujets de concours).
- L'**isolement** consiste à définir une frontière fictive qui englobe tout le système isolé E que l'on cherche à étudier. Cette frontière fictive permet d'identifier un milieu intérieur au système isolé et un milieu extérieur $\bar{E}$ au système isolé.

Le système matériel isolé E peut être un solide, une portion de solide, un ensemble de solides, le mécanisme entier, …

On n'isole jamais le bâti !

- On définit des actions mécaniques extérieures qui correspondent à toutes les actions mécaniques exercée par le milieu extérieur (solide, fluide, ressort, pesanteur, …) et qui agissent SUR un élément du système isolé.
- On définit des actions mécaniques intérieures qui correspondent à toutes les actions mécaniques exercée par un élément (solide, fluide, ressort, …) appartenant au système isolé et qui agit SUR un élément du système isolé.

Les actions mécaniques intérieures ne sont pas prises en compte lors de l'écriture du principe fondamental de la statique !

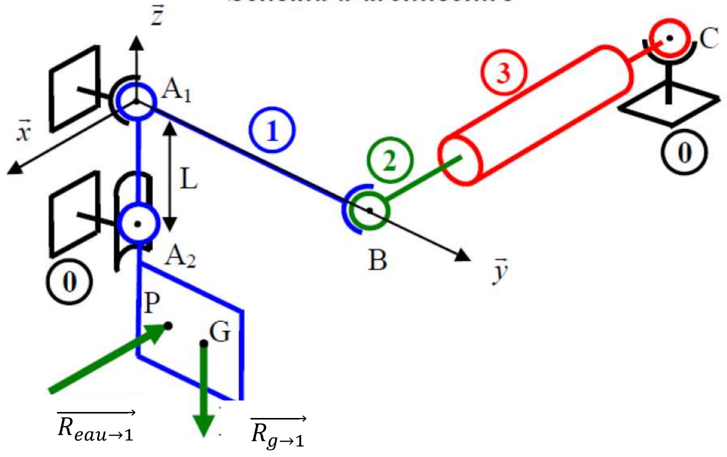
En pratique, on ajoute toutes les actions mécaniques extérieures et certaines actions mécaniques intérieures agissant sur le système sur le graphe de structure : il est alors appelé **graphe de structure**. On peut aussi ajouter les actions mécaniques extérieures sur le schéma d'architecture pour mieux appréhender le problème.

Exemple du pilote automatique de bateau :

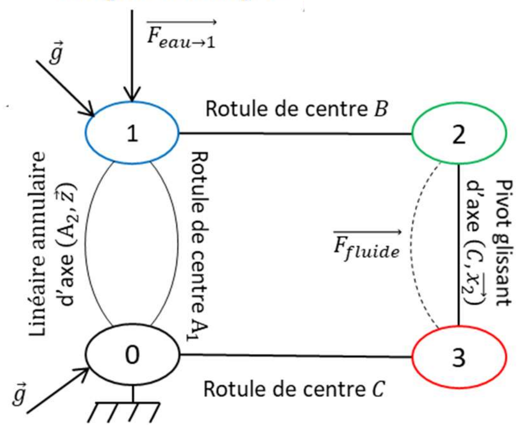
On réalise dans un 1er temps le bilan complet des actions mécaniques agissant sur le pilote automatique. On ajoute ces données sur le graphe de structure et éventuellement sur le schéma d'architecture :

- L'eau exerce une action mécanique sur le gouvernail (**1**) modélisée globalement par une force $\overrightarrow{F_{eau\to 1}} = -F.\vec{x}$ en P.
- Le fluide exerce une action mécanique sur le corps du vérin **3** ainsi que sur la tige du vérin **2**, on la note en utilisant un trait pointillé et en indiquant fluide sur le graphe de structure.
- Seuls les ensembles **0** et **1** sont soumis à l'action mécanique de la pesanteur $\vec{g}$ (Hypothèse : on néglige cette AM sur les solides **2** et **3**), on la note en entourant d'un trait fin pointillé tous les éléments concernés.

Schéma d'architecture



Graphe d'analyse



3. Principe Fondamental de la Statique (P.F.S)

3.1. Définitions

3.1.1. Référentiel Galiléen

Un référentiel Galiléen est l'association d'un repère géométrique et d'un repère temporel pour lequel le Principe Fondamental de la Statique est vrai. En SII, on considère Galiléen :

- Tout repère **fixe** (*i.e.* sans mouvement) par rapport à la Terre.
- Ou tout repère en mouvement de **translation rectiligne** (*i.e.* sa trajectoire est une droite) **uniforme** (sa vitesse est constante) par rapport à la terre.

3.1.2. Equilibre

Un système E est en équilibre dans un référentiel Galiléen si, au cours du temps, chaque point de E conserve la même position par rapport au repère géométrique du référentiel.

3.2. Enoncé du P.F.S

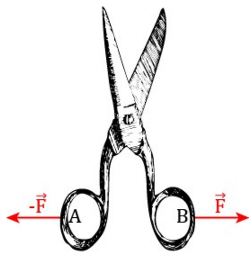
La condition nécessaire pour qu'un système matériel E soit en équilibre par rapport à un référentiel Galiléen est que la somme des torseurs des actions mécaniques extérieures à E soit nulle.

$$\sum\{\mathcal{T}_{\bar{E}\to E}\} = \{0\} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}} \\ \overrightarrow{M_{A(\bar{E}\to E)}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_A \text{, où } A \text{ est un point quelconque}$$

Lorsque l'on somme des torseurs ces derniers doivent tous être écrits au même point !

La condition $\sum\{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\bar{E}\to E}\} = \{\mathbf{0}\}$ est une condition nécessaire mais pas suffisante !

$$\textbf{Equilibre de } \boldsymbol{E} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \sum\{\boldsymbol{\mathcal{T}}_{\bar{E}\to E}\} = \{\mathbf{0}\}$$



Exemple du pilote automatique :

Ecriture du PFS pour $E = \{\mathbf{1}\}$ au point A_1 : $\sum\{\mathcal{T}_{\bar{E}\to E}\} = \{0\}$

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{eau\to 1}} \\ \overrightarrow{M_{A_1(eau\to 1)}} \end{Bmatrix}_{A_1} + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{Rotule,0\to 1}} \\ \overrightarrow{M_{A_1(Rotule,0\to 1)}} \end{Bmatrix}_{A_1} + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{LA,0\to 1}} \\ \overrightarrow{M_{A_1(LA,0\to 1)}} \end{Bmatrix}_{A_1} + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{g\to 1}} \\ \overrightarrow{M_{A_1(g\to 1)}} \end{Bmatrix}_{A_1} + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{2\to 1}} \\ \overrightarrow{M_{A_1(2\to 1)}} \end{Bmatrix}_{A_1} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{A_1}$$

3.3. Théorèmes généraux de la statique - Traduction vectorielle du PFS

L'énoncé du PFS conduit à l'écriture de deux équations vectorielles soit :

- Le théorème de la résultante statique : $\overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}} = \vec{0}$
- Le théorème du moment statique : $\overrightarrow{M_{A(\bar{E}\to E)}} = \vec{0}$

Le théorème de la résultante statique et le théorème du moment statique sont ensuite projetés sur les 3 axes d'une même base, ce qui conduit à **6 équations scalaires** dans le cas d'un **problème spatial.**

3.4. Application du PFS

3.4.1. Théorème des actions réciproques

Soient deux solides 1 et 2 qui exercent chacun des actions mécaniques l'un sur l'autre. On a :

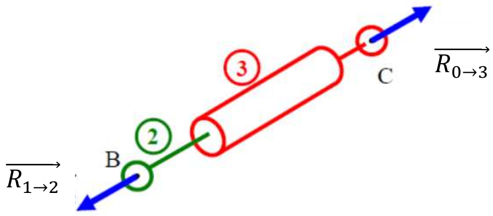
$$\{\mathcal{T}_{2\to1}\} = -\{\mathcal{T}_{1\to2}\}$$

3.4.2. Cas particulier d'un système matériel *E* soumis à 2 forces

Si un système matériel en équilibre subit l'action unique de 2 forces alors ces forces ont même norme et sont directement opposées.

Exemple du pilote automatique :

L'ensemble {2+3} (vérin) est soumis à 2 forces. Ces deux forces ont donc même norme et sont directement opposées.



3.4.3. Cas particulier des problèmes plan

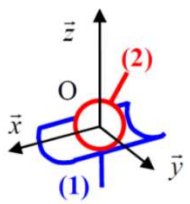
Certains cas fréquemment rencontrés concernent les systèmes en équilibre sous l'effet d'actions mécaniques dont les résultantes sont coplanaires et les moments éventuels perpendiculaires à ce plan. Ces systèmes sont qualifiés de systèmes plans.

Dans le cas **d'un problème plan**, l'application du PFS ne peut fournir au maximum que 3 **équations scalaires** (2 équations issues du théorème de la résultante statique projetée sur les 2 axes de la base appartenant au plan + 1 équation issue du théorème du moment statique projetée sur le 3$^{\text{ème}}$ axe de la base perpendiculaire au plan).

Dans un problème plan, le torseur des actions mécaniques transmissibles possède forcement 3 composantes nulles.

Exemple :

Si on considère une liaison linéaire annulaire d'axe $(O,\vec{x})$ entre 2 solides 1 et 2, la forme générale du torseur d'action mécanique transmissible dans le cas tridimensionnel est donnée ci-contre. Si le problème est plan alors certains termes du torseur non nuls dans le cas tridimensionnel deviennent nécessairement nuls.



$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Simplifications d'une liaison linéaire annulaire dans le cas d'un problème plan

Problème de plan $(O,\vec{x},\vec{y})$

$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ Y_{12} & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Problème de plan $(O,\vec{y},\vec{z})$

$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ Y_{12} & - \\ Z_{12} & - \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Problème de plan $(O,\vec{x},\vec{z})$

$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ - & 0 \\ Z_{12} & - \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Ce type de raisonnement se généralise à tous les torseurs d'actions mécaniques transmissibles des liaisons normalisées et permet ainsi de minimiser le nombre d'inconnues statiques.

4. Méthode générale de résolution analytique pour des problèmes de statique

Etape 1 : On réalise un graphe de structure.

Etape 2 : On réalise un bilan complet des actions mécaniques et on complète le graphe de structure . On ajoute éventuellement ces actions mécaniques sur le schéma d'architecture.

Etape 3 : On identifie (s'il y en a) les systèmes soumis à l'action unique de deux actions mécaniques ce qui permet d'identifier à chaque fois une direction et de supprimer des composantes d'actions mécaniques inconnues.

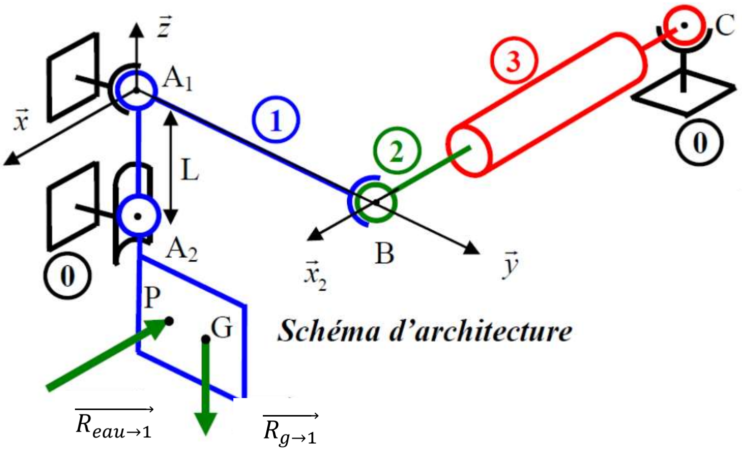
On utilise le Principe Fondamental de la Statique. Deux méthodes sont possibles et doivent être choisies en fonction de l'objectif d'étude :

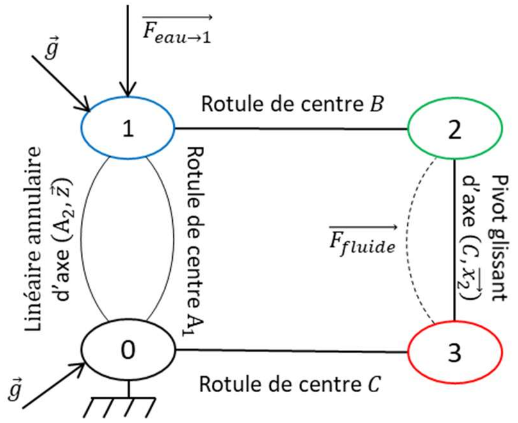
Objectif d'étude 1 : **On cherche toutes les inconnues d'une liaison.**	**Objectif d'étude 2 :** **On cherche une équation reliant une inconnue aux données.**
Etape 4 : On cherche une frontière d'isolement faisant apparaître les inconnues recherchées ainsi que des données connues tout en limitant le nombre d'inconnues non recherchées. On dresse le bilan des actions mécaniques extérieures au système isolé (on donne les torseurs d'actions mécaniques aux points les plus simples).	**Etape 4 :** On cherche une frontière d'isolement faisant apparaître l'inconnue recherchée, les données et limitant le nombre d'inconnues non recherchées. On dresse le bilan des actions mécaniques extérieures au système isolé (on donne les torseurs d'actions mécaniques aux points les plus simples).
Etape 5 : On écrit le PFS en déplaçant tous les torseurs au même point (choisir, parmi les différents points disponibles pour les torseurs, celui qui demande le moins de changements de points).	**Etape 5 :** En observant les torseurs d'actions mécaniques extérieures inconnues non recherchées, on choisit le théorème à appliquer (résultante ou moment) et on projette sur un axe ne faisant pas intervenir ces inconnues. On obtient une équation scalaire.
Etape 6 : Si le nombre d'inconnues $Is \leq 6$ on peut résoudre, sinon on écrit les 6 équations obtenues et on cherche un nouvel isolement faisant intervenir à nouveau les inconnues recherchées ou celles apparues.	**Etape 6 :** S'il reste des inconnues inutiles, on recherche un autre isolement ou une autre équation permettant de résoudre en utilisant la même règle.
Etape 7 : On résout littéralement le(s) système(s) d'équations.	**Etape 7 :** On résout littéralement le(s) système(s) d'équations.
Etape 8 : On effectue les applications numériques et on valide ou non le critère de performance attendu.	**Etape 8 :** On effectue les applications numériques et on valide ou non le critère de performance attendu.

Exemple du pilote automatique :

Objectif d'étude : Déterminer la pression dans le vérin lié à l'action de l'eau sur le gouvernail.

Etape 1 + Etape 2 : Graphe de structure.





<u>Données supplémentaires :</u>

$$\overrightarrow{A_1B} = y_b\vec{y}\,,\overrightarrow{A_1G} = y_G\vec{y} + z_G\vec{z}\,,\overrightarrow{A_1P} = y_P\vec{y} + z_P\vec{z}$$

Etape 3 :

On remarque que l'ensemble 2+3 n'est soumis qu'à l'action unique de deux forces $\rightarrow$ ces deux forces ont donc même norme et sont directement opposées. $\overrightarrow{R_{1\to2}}$ et $\overrightarrow{R_{0\to3}}$ ont donc pour direction la droite $(B,\overrightarrow{x_2})$ avec sur ce problème $\overrightarrow{x_2} = \vec{x}$.

On est dans le cas d'un problème de type 2 puisque l'on cherche à relier une inconnue (en l'occurrence la force inconnue $\overrightarrow{R_{1\to2}}$ à partir de laquelle on peut calculer la pression dans le vérin) aux données connues.

Etape 4 : On isole le solide 1 seul + B.A.M.E. :

En A_1 : $\{\mathcal{T}_{Rotule,0\to1}\} = \begin{Bmatrix} X_{R01} & 0 \\ Y_{R01} & 0 \\ Z_{R01} & 0 \end{Bmatrix}_{(A_1,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

En A_2 : $\{\mathcal{T}_{LA,0\to1}\} = \begin{Bmatrix} X_{LA01} & 0 \\ Y_{LA01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A_2,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

En P : $\{\mathcal{T}_{eau\to1}\} = \begin{Bmatrix} -R_{eau} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(P,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

En G : $\{\mathcal{T}_{g\to1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -mg & 0 \end{Bmatrix}_{(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

En B : $\{\mathcal{T}_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(B,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Etape 5 + 6 : On élabore la stratégie de résolution.

L'inconnue recherchée est $\overrightarrow{R_{2\to1}}$, les actions mécaniques connues sont $\overrightarrow{R_{eau\to1}}$ et $\overrightarrow{R_{g\to1}}$. L'écriture du théorème du moment statique au point A_1 projeté sur l'axe $\vec{z}$ permet d'obtenir une équation scalaire qui relie directement $\overrightarrow{R_{2\to1}}$ à y_P, y_B et F.

Etape 7 : Résolution littérale

Théorème du moment statique en A_1 projeté sur $\vec{z}$.

$$\left(\overrightarrow{M_{A_1,eau\to1}}+\overrightarrow{M^R_{A_1,0\to1}}+\overrightarrow{M^{LA}_{A_1,0\to1}}+\overrightarrow{M_{A_1,g\to1}}+\overrightarrow{M_{A_1,2\to1}}\right)\cdot\vec{z}=0$$

$$y_P.F_{eau}+0+0+0-y_B.X_{21}=0$$

$$X_{21}=\frac{y_P}{y_B}F_{eau}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{R_{2\to1}}=\frac{y_P}{y_B}F_{eau}.\vec{x}$$

Etape 8 : Application numérique

Données :

- Force exercée par l'eau $F_{eau}=600$ N
- $y_P=200$ mm
- $y_B=600$ mm
- Diamètre du piston du vérin $D=30$ mm

Effort du piston :

Théorème de la résultante statique suivant $\vec{x}$.

$$F_{fluide}=\frac{y_P}{y_B}F_{eau}=200\text{ N}$$

Pression dans le piston :

$$p=\frac{F_{fluide}}{S}=\frac{4F_{fluide}}{\pi D^2}=\frac{800}{\pi 30^2}=0{,}28\text{ MPa}=2{,}8\text{ bar}$$