Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 5 : 7 au 11 octobre 2024

Questions de cours

Chaque semaine, le colleur peut demander en question de cours de citer un théorème, une propriété, une définition de son choix. Il peut aussi piocher dans la liste suivante :

- ☐ Citer toutes les CNS de diagonalisabilité et toutes les CNS de trigonalisabilité.
- ☐ Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et la diagonaliser. *Le colleur pourra remplacer la matrice A par une matrice de son choix.*
- ☐ Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice inversible P et des réels α et β tels que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$. *Le colleur pourra remplacer la matrice A par une matrice de son choix.*
- ☐ Déterminer, pour chacune des matrices suivantes, si elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou pas. *Le colleur pourra poser cette question avec d'autres matrices.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 3 & & n \\ \vdots & \ddots & 3 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \ddots & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 5 & 3 & 2 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

- ☐ Montrer qu'un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

Chapitre 4 : Valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Révisions du programme précédent

Chapitre 5 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

I Endomorphismes et matrices diagonalisables

I.1 Définition et exemples fondamentaux

- définition d'un endomorphisme diagonalisable, d'une matrice carrée diagonalisable.
- si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de diagonalisation de u, alors tous les e_k sont des vecteurs propres de u.
- tout projecteur est diagonalisable, toute symétrie est diagonalisable.
- une matrice (un endomorphisme) diagonalisable possédant une unique valeur propre est une homothétie. Tout endomorphisme nilpotent non nul n'est pas diagonalisable.
- toute matrice symétrique <u>réelle</u> est diagonalisable (cf chapitre ultérieur).

I.2 CNS de diagonalisabilité portant sur les sous-espaces propres

- $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si E est égale à la somme directe des sous-espaces propres.
- $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si $\dim(E) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est égale à la somme directe des sous-espaces propres.
- $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si $n = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A)$.
- si $n = \dim(E)$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$ admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

I.3 CNS de diagonalisabilité portant sur χ_u

- si χ_u est scindé à racines simples, alors u est diagonalisable.
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé <u>et</u> pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m(\lambda)$.

I.4 CNS de diagonalisabilité portant sur les polynômes annulateurs

- u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
- u est diagonalisable si et seulement si π_u est scindé à racines simples.
- si u est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit par u sur F (où F est stable par u) est diagonalisable.

II Endomorphismes et matrices trigonalisables

II.1 Définitions

- définition d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice carrée trigonalisable.
- si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de trigonalisation de u, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est stable par u.

II.2 CNS de trigonalisabilité portant sur χ_u

- u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.
- si u est trigonalisable, alors l'endomorphisme induit par u sur F (où F est stable par u) est trigonalisable.
- si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, tout endomorphisme de E est trigonalisable. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

II.3 CNS de trigonalisabilité portant sur les polynômes annulateurs

- u est trigonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé.
- u est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.
- u est nilpotent si et seulement si u est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.
- u est nilpotent si et seulement si $\chi_u = X^n$, où $n = \dim(E)$.

II.4 Sous-espaces caractéristiques

- si u est trigonalisable, alors E est égale à la somme directe des sous-espaces caractéristiques de u.
- pour tout valeur propre λ de u, la dimension du sous-espace caractéristique $\mathrm{Ker}((u - \lambda\,\mathrm{id}_E)^{m(\lambda)})$ est égale à $m(\lambda)$.
- si χ_u est scindé, alors il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieur de coefficients diagonaux tous égaux.