

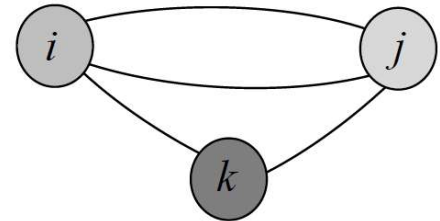
Liaisons équivalentes

Compétence

Modéliser :

- Déterminer la liaison cinématiquement équivalente à une association de liaisons ;

L'objectif de cours est d'introduire le principe d'association de liaison, qu'elle soit en parallèle ou en série. On parlera de manière générale de liaison équivalente.



1. Définition

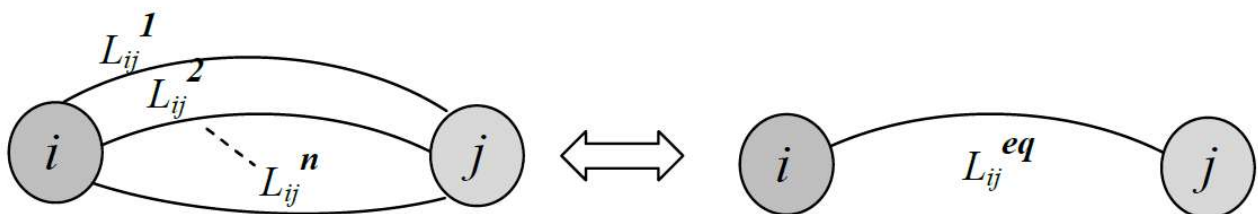
Supposons qu'il existe entre les pièces i et j, plusieurs liaisons réalisées avec ou sans pièce intermédiaire.

La liaison équivalente à l'ensemble des liaisons situées entre les pièces i et j est la liaison théorique de référence qui a le même comportement que cette association de liaisons.

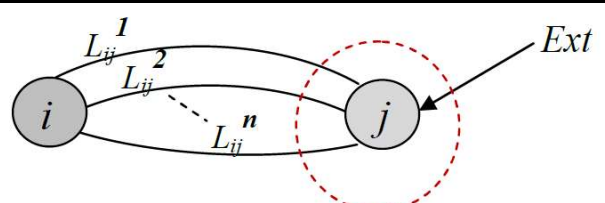
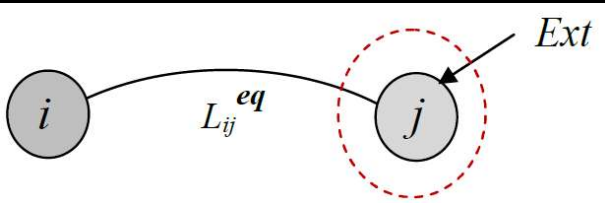
C'est-à-dire qu'elle transmet la même action mécanique et qui autorise le même mouvement.

2. Liaisons en parallèle

Soient n liaisons disposées en parallèle entre deux solides.



2.1. Torseur des actions mécanique transmissibles équivalent

 On isole {j} puis on applique le PFS : $\sum_{k=1}^n \{\tau_{i \rightarrow j}^k\} + \{\tau_{ext \rightarrow j}\} = \{0\} \quad (1)$	 On isole {j} puis on applique le PFS : $\{\tau_{i \rightarrow j}^{eq}\} + \{\tau_{ext \rightarrow j}\} = \{0\} \quad (2)$
--	---

En comparant les relations (1) et (2), on a donc :

$$\{\tau_{i \rightarrow j}^{eq}\} = \sum_{k=1}^n \{\tau_{i \rightarrow j}^k\}$$

Conclusion : pour qu'une composante du torseur des actions transmissibles de la liaison équivalente ne soit pas nulle, il suffit qu'une seule composante d'une liaison L_{ij}^k ne soit pas nulle.

Remarque : la connaissance du torseur des actions transmissibles de la liaison équivalente entraîne la connaissance du torseur cinématique de la liaison équivalente.

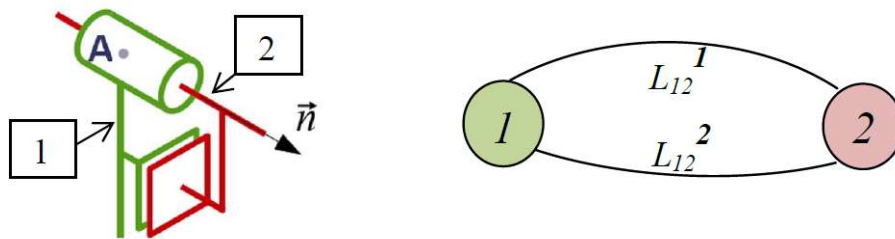
2.2. Torseur cinématique équivalent

On a par compatibilité (cf. cours de cinématique du solide) :

$$\{\mathcal{V}_{i/j}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{i/j}^1\} = \{\mathcal{V}_{i/j}^2\} = \dots = \{\mathcal{V}_{i/j}^n\}$$

2.3. Exemple

Une mise en position « appui-plan, centrage long » se modélise par le schéma cinématique suivant.



Liaison équivalente par approche cinématique :

$$\{\mathcal{V}_{1/2}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{1/2}^1\} = \{\mathcal{V}_{1/2}^2\}$$

$$\begin{Bmatrix} p_{12}^{eq} \\ q_{12}^{eq} \\ r_{12}^{eq} \end{Bmatrix}_{A,(-,-,\vec{n})} \begin{Bmatrix} u_{12}^{eq} \\ v_{12}^{eq} \\ w_{12}^{eq} \end{Bmatrix}_{A,(-,-,\vec{n})} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{12}^1 & w_{12}^1 \end{Bmatrix}_{A,(-,-,\vec{n})} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{12}^2 \\ 0 & v_{12}^2 \\ r_{12}^2 & 0 \end{Bmatrix}_{A,(-,-,\vec{n})}$$

Donc :

$$\{\mathcal{V}_{1/2}^{eq}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ r_{12}^{eq} & 0 \end{Bmatrix}_{A,(-,-,\vec{n})} \quad \text{with } r_{12}^{eq} = r_{12}^1 = r_{12}^2$$

La liaison équivalente est une liaison pivot d'axe $(A, \vec{n})$.

Liaison équivalente par approche statique :

$$\{\tau_{1 \rightarrow 2}^{eq}\} = \{\tau_{1 \rightarrow 2}^1\} + \{\tau_{1 \rightarrow 2}^2\}$$

$$\begin{pmatrix} X_{12}^{eq} & L_{12}^{eq} \\ Y_{12}^{eq} & M_{12}^{eq} \\ Z_{12}^{eq} & N_{12}^{eq} \end{pmatrix}_{A,(-,-,\vec{n})} = \begin{pmatrix} X_{12}^1 & L_{12}^1 \\ Y_{12}^1 & M_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{A,(-,-,\vec{n})} + \begin{pmatrix} 0 & L_{12}^2 \\ 0 & M_{12}^2 \\ Z_{12}^2 & 0 \end{pmatrix}_{A,(-,-,\vec{n})}$$

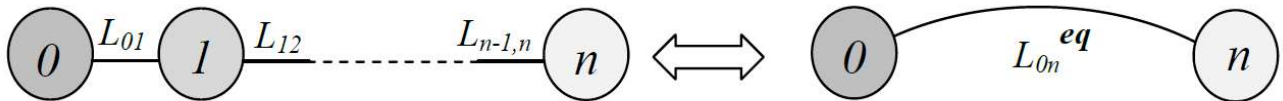
Donc :

$$\{\tau_{1/2}^{eq}\} = \begin{pmatrix} X_{12}^{eq} = X_{12}^1 & L_{12}^{eq} = L_{12}^1 + L_{12}^2 \\ Y_{12}^{eq} = Y_{12}^1 & M_{12}^{eq} = M_{12}^1 + M_{12}^2 \\ Z_{12}^{eq} = Z_{12}^2 & 0 \end{pmatrix}_{A,(-,-,\vec{n})}$$

La liaison équivalente est une liaison pivot d'axe $(A, \vec{n})$.

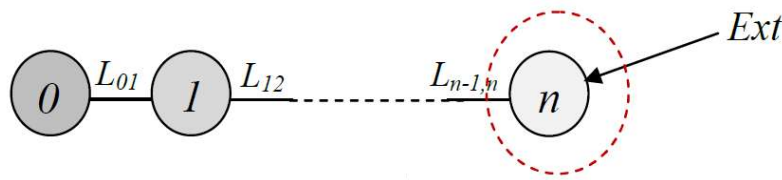
3. Liaison en série

Soient n liaisons à la suite l'une de l'autre par l'intermédiaire de $n+1$ solides. On obtient une chaîne ouverte.



3.1. Torseur des actions transmissibles équivalent

On isole $\{n\}$. Bilan des actions mécaniques extérieures, on a :



Bilan des actions mécaniques :

- L'action de liaison : $\{\tau_{n-1 \rightarrow n}\}$
- Les autres actions extérieures : $\{\tau_{ext \rightarrow n}\}$

On applique le principe fondamental de la statique :

$$\{\tau_{n-1 \rightarrow n}\} + \{\tau_{ext \rightarrow n}\} = \{0\} \quad (3)$$

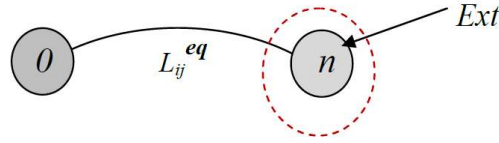
En isolant $\{n \cup (n-1)\}$, en appliquant le même principe, on obtient :

$$\{\tau_{n-2 \rightarrow n-1}\} + \{\tau_{ext \rightarrow n}\} = \{0\} \quad (3)$$

On montre donc par isolement successif que l'on a pour $k \in [1, n]$

$$\{\tau_{k-1 \rightarrow k}\} + \{\tau_{ext \rightarrow n}\} = \{0\} \quad (3)$$

De même, en prenant cette fois le modèle de la liaison équivalente :



On obtient en appliquant le même principe :

$$\{\tau_{0 \rightarrow n}^{eq}\} + \{\tau_{ext \rightarrow n}\} = \{0\} \quad (4)$$

En comparant les relations (3) et (4), on a donc :

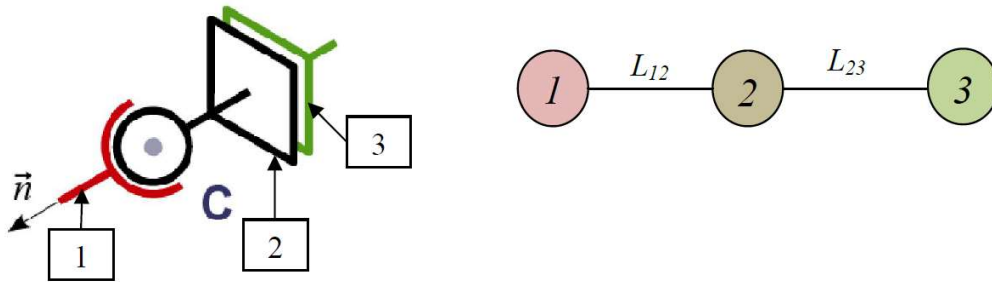
$$\{\tau_{0 \rightarrow n}^{eq}\} = \{\tau_{0 \rightarrow 1}\} = \dots = \{\tau_{n-1 \rightarrow n}\}$$

3.2. Torseur cinématique équivalent

On effectue une composition de mouvements :

$$\{\mathcal{V}_{n/0}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{n/n-1}\} + \dots + \{\mathcal{V}_{1/0}\}$$

3.3. Exemple



Liaison équivalente par approche cinématique :

$$\{\mathcal{V}_{1/3}^{eq}\} = \{\mathcal{V}_{1/2}^{eq}\} + \{\mathcal{V}_{2/3}^{eq}\}$$

$$\begin{pmatrix} p_{13}^{eq} & u_{13}^{eq} \\ q_{13}^{eq} & v_{13}^{eq} \\ r_{13}^{eq} & w_{13}^{eq} \end{pmatrix}_{C,(-,-,\vec{n})} = \begin{pmatrix} p_{12} & 0 \\ q_{12} & 0 \\ r_{12} & 0 \end{pmatrix}_{C,(-,-,\vec{n})} + \begin{pmatrix} 0 & u_{23} \\ 0 & v_{23} \\ r_{23} & 0 \end{pmatrix}_{C,(-,-,\vec{n})}$$

Donc :

$$\{\mathcal{V}_{12}^{eq}\} = \begin{pmatrix} p_{13}^{eq} = p_{12} & u_{13}^{eq} = u_{23} \\ q_{13}^{eq} = q_{12} & v_{13}^{eq} = v_{23} \\ r_{12}^{eq} = r_{12} + r_{23} & 0 \end{pmatrix}_{C,(-,-,\vec{n})}$$

La liaison équivalente est une liaison ponctuelle d'axe $(C, \vec{n})$.

Liaison équivalente par approche statique :

$$\{\tau_{1 \rightarrow 3}^{eq}\} = \{\tau_{1 \rightarrow 2}^{eq}\} = \{\tau_{2 \rightarrow 3}^{eq}\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} X_{13}^{eq} & L_{13}^{eq} \\ Y_{13}^{eq} & M_{13}^{eq} \\ Z_{13}^{eq} & N_{13}^{eq} \end{matrix} \right\}_{C,(-,-,\vec{n})} = \left\{ \begin{matrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{matrix} \right\}_{C,(-,-,\vec{n})} = \left\{ \begin{matrix} 0 & L_{23} \\ 0 & M_{23} \\ Z_{23} & 0 \end{matrix} \right\}_{C,(-,-,\vec{n})}$$

Donc :

$$\{\tau_{1 \rightarrow 3}^{eq}\} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{13}^{eq} = Z_{12} = Z_{23} & 0 \end{matrix} \right\}_{C,(-,-,\vec{n})}$$

La liaison équivalente est une liaison ponctuelle d'axe $(C, \vec{n})$.

4. Bilan

	Liaisons en parallèle	Liaisons en série
Liaison équivalente par approche cinématique	Egalité	Somme
Liaison équivalente par approche statique	Somme	Egalité