Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 6 : 14 au 18 octobre 2024

Questions de cours

Chaque semaine, le colleur peut demander en question de cours de citer un théorème, une propriété, une définition de son choix. Il peut aussi piocher dans la liste suivante :

- ☐ Savoir donner rapidement et sans erreur n'importe quel développement limité (au choix du colleur) de la liste suivante :
  - $\frac{1}{1-x}$ en 0
  - $\frac{1}{1+x}$ en 0
  - $\exp(x)$ en 0
  - $\ln(1+x)$ en 0
  - $(1+x)^\alpha$ en 0, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - $\mathrm{sh}(x)$ en 0
  - $\mathrm{ch}(x)$ en 0
  - $\sin(x)$ en 0
  - $\cos(x)$ en 0
  - $\tan(x)$ en 0 (à l'ordre 3)
  - $\mathrm{Arctan}(x)$ en 0
  - $\mathrm{Arcsin}(x)$ en 0
  - $\mathrm{Arccos}(x)$ en 0

- ☐ Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$\forall n \geqslant 1,\ v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

  Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers ℓ.

- ☐ Soit $n \geqslant 2$.
  a) Montrer l'existence d'une unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $x^n + x - 3 = 0$. On note x_n cette racine. Donner le signe de $x_n - 1$.
  b) Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\geqslant 2}$.
  c) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 1 puis déterminer un équivalent de $x_n - 1$.

- ☐ Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E. Montrer que l'application définie sur E par $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme sur E.

- ☐ En partant de l'inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, démontrer que

$$\forall x, y \in E, \quad \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leqslant \|x-y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

- ☐ Montrer que toute boule ouverte est une partie convexe de E.

Chapitre 5 : Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Révisions du programme précédent

Chapitre 6 : Exercices sur les suites

Quelques exercices portant sur les thèmes suivants :

- suites équivalentes, limites de suites.
- utilisation de développements limités.
- théorème de Césaro. *Ce théorème n'est pas au programme, il faut savoir le redémontrer.*
- suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$.
- suites définies implicitement, comme unique solution d'une équation.

Chapitre 7 : Normes et suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

I Espaces vectoriels normés

I.1 Définition

- définition d'une norme sur E. Notation $\|\cdot\|$.
- vecteur unitaire. Pour tout x non nul, $\frac{x}{\|x\|}$ est unitaire.

I.2 Norme associée à un produit scalaire

- rappel de la définition d'un produit scalaire. Norme associée (norme euclidienne).
- quelques exemples dans $\mathbb{R}^n$, dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, dans $\mathbb{R}[X]$.

I.3 Normes sur $\mathbb{K}^n$

- norme 1 : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$.
- norme infinie : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$.
- norme 2 : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2}$. Dans $\mathbb{R}^n$, cette norme est la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique.
- si E est un espace vectoriel de dimension finie et si on fixe une base $\mathcal{B}$ de E, on peut définir ces trois normes de la même manière en utilisant les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

I.4 Distances, boules, sphères et parties convexes

- distance associée à une norme.
- inégalités triangulaires : $\forall (x,y) \in E^2,\ \big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leqslant \|x \pm y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.
- boules ouvertes, boules fermées, sphères.
- parties convexes. Les boules ouvertes et les boules fermées sont convexes.
- parties bornées.

I.5 Norme infinie sur l'ensemble des fonctions bornées

- application bornée $f : X \to E$, où X est un ensemble non vide et E un evn.
- pour toute $f : X \to E$ bornée, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} \|f(x)\|$.
  $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'ensemble des fonctions bornées de X dans E, appelée *norme infinie* ou *norme de la convergence uniforme.*
- suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un evn E. $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|$.

I.6 Normes sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

- norme infinie, $\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}),\ \|f\|_\infty = \sup\limits_{t\in[a,b]} \|f(t)\|$.
- norme 1 : $\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}),\ \|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$, appelée *norme 1* ou *norme de la convergence en moyenne.*
- norme 2 : $\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K}),\ \|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\mathrm{d}t}$, appelée *norme 2* ou *norme de la convergence en moyenne quadratique.*

I.7 Norme produit

- norme produit sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

II Suites à valeurs dans un evn

II.1 Suites convergentes

- suites convergentes, suites divergentes. (u_n) converge vers $\ell \in E$ si et seulement si la suite réelle $(\|u_n - \ell\|)$ converge vers 0.
- unicité de la limite.
- la convergence d'une suite dépend de la norme utilisée.
- toute suite convergente est bornée.
- opérations algébriques sur les limites.
- suite à valeurs dans un espace produit. Étudier la convergence d'une suite à valeurs dans $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ revient à étudier la convergence de toutes les suites coordonnées.

II.2 Suites extraites, valeurs d'adhérence

- suite extraite, valeur d'adhérence d'une suite.
- si (u_n) converge vers $\ell \in E$, alors toute extraite converge aussi vers $\ell \in E$.
- si une suite (u_n) possède au moins deux valeurs d'adhérence, alors elle diverge.

III Équivalence de normes

III.1 Définition

- normes équivalentes. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes.

III.2 Invariance du caractère borné, du caractère convergent

- si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes et si A est une partie de E, alors A est bornée pour $\|\cdot\|_1$ si et seulement si A est bornée pour $\|\cdot\|_2$.
- si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, alors (u_n) converge vers ℓ pour la norme $\|\cdot\|_1$ si et seulement si (u_n) converge vers ℓ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

III.3 Exemples et contre-exemples

- dans $\mathbb{R}^2$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.
- pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite qui est bornée pour l'une et non pour l'autre, ou bien de trouver une suite qui converge pour l'une et non pour l'autre.

Hors programme cette semaine :

Équivalence de normes en dimension finie.
Ouverts, fermés, ...
Fonctions continues à valeurs dans un evn.