

# ELECTROSTATIQUE

## 1. Le champ électrique

### 1.1 charges électriques, force de Coulomb

charge électrique : caractéristique des particules élémentaires (avec la masse et d'autres choses)

proton :  $+e$

neutron :  $0$

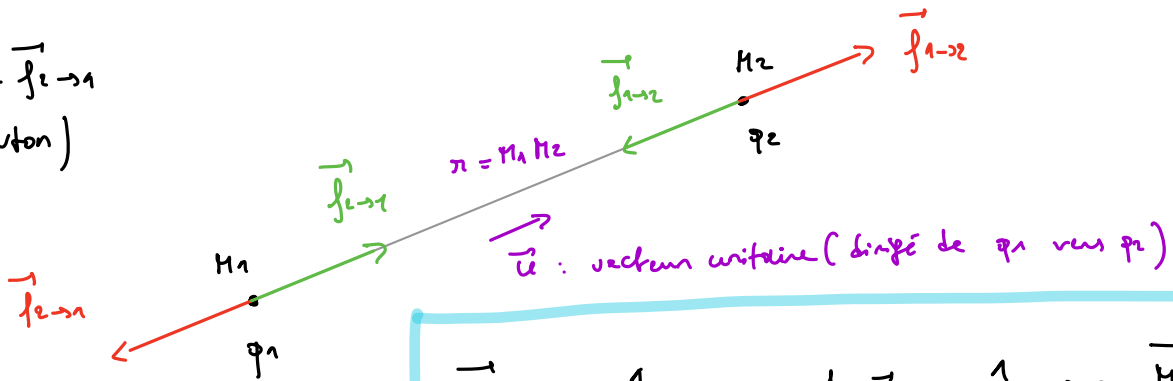
électron :  $-e$

avec  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  Coulomb charge élémentaire

postulat de conservation de la charge électrique : elle ne peut être ni créée ni détruite

force de Coulomb : valable pour des charges immobiles

$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1}$   
(3<sup>e</sup> loi Newton)



$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{4\pi\epsilon} q_1 q_2 \cdot \frac{1}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon} q_1 q_2 \frac{M_1 M_2}{M_1 M_2^3}$$

cas répulsif :  $q_1$  et  $q_2$  de même signe

cas attractif :  $q_1$  et  $q_2$  de signes opposés

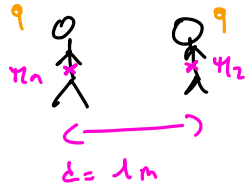
$$\vec{u} = \frac{M_1 M_2}{\sqrt{M_1 M_2}}$$

$\epsilon_0$  : permittivité diélectrique du vide ("constante électrique")

$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$  F.m<sup>-1</sup>

La force de Coulomb est très intense:

Imaginons deux "bonhommes" entièrement chargés  
 → charge des protons uniquement



Rappel:

$$m_{\text{proton}} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_{\text{électron}} : 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

environ  $\frac{m_{\text{humain}}}{m_{\text{proton}}} \approx \frac{70}{1,7 \cdot 10^{-27}} = 5 \cdot 10^{28}$  protons

(on fait comme si il n'y avait que des protons)  $\Rightarrow q = 5 \cdot 10^{28} \times 1,6 \cdot 10^{-19}$   
 $\approx 8 \cdot 10^9 \text{ C}$   
 $\approx 10^{10} \text{ C}$

$$f = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} = \frac{(10^{10})^2}{10^{10} \times 1^2} = 10^{30} \text{ N (!)}$$

$4\pi\epsilon_0$

à titre de comparaison,  $f_{\text{solaire-terre}} = \frac{G M_{\text{terre}} M_{\text{s}}}{r^2} = \frac{6,7 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{(1,5 \cdot 10^{11})^2}$   
 $= \frac{80 \cdot 10^{43}}{2 \cdot 10^{22}} = 4 \cdot 10^{22} \text{ N}$

les forces électriques ne dominent pas à grande échelle car elles se compensent pour l'essentiel (matière électriquement neutre).

À l'échelle atomique, les forces de gravitation sont complètement négligeables devant les forces électriques: par ex, pour un atome H

$$\frac{f_{\text{Coulomb}}}{f_{\text{gravitation}}} = \frac{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}}{\frac{G m_p m_e}{d^2}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_p m_e} = \frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{10^{-16} \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 1,7 \cdot 10^{-27}}$$

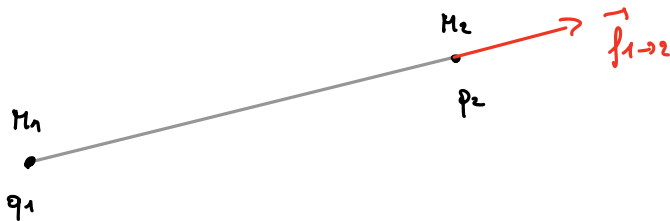
$\begin{array}{l} -e \\ \bullet \text{ électron} \\ \text{---} \\ +e \quad d \\ \bullet \text{ proton} \\ m_p \end{array}$

$$\approx \frac{2 \cdot 10^{-38}}{10^2 \cdot 10^{-73}} \approx 2 \cdot 10^{35}$$

À l'échelle d'un atome, les forces électriques sont environ  $10^{40}$  fois + intenses que les forces de gravitation!

## 1.2 Notion de champ électrique $\vec{E}$

principe : on décrit de manière indirecte l'interaction entre 2 charges :



on décompose en 2 étapes la force exercée par  $q_1$  sur  $q_2$  :

- (1) La charge  $q_1$  crée au point  $M_2$  un champ électrique  $\vec{E}(M_2)$
- (2) La charge  $q_2$  subit, du fait de ce champ électrique, la force  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2}$

Avec  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}(M_2)$  et  $\vec{E}(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2^3}$

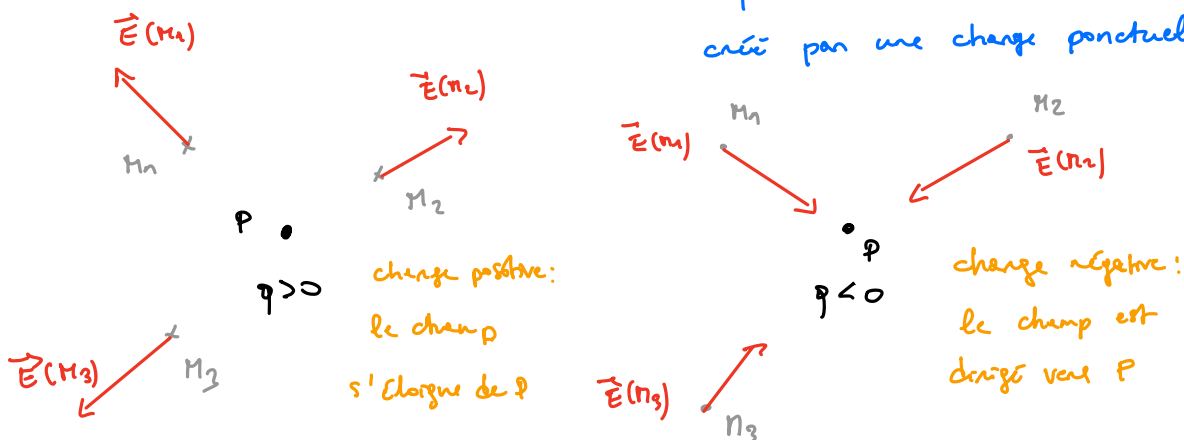
On retrouve bien  $\vec{f}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{M_1 M_2^3}$

On retient 2 résultats importants :

- une charge électrique  $q$  placée dans un champ électrique  $\vec{E}$  subit une force électrique  $\vec{f} = q \vec{E}$

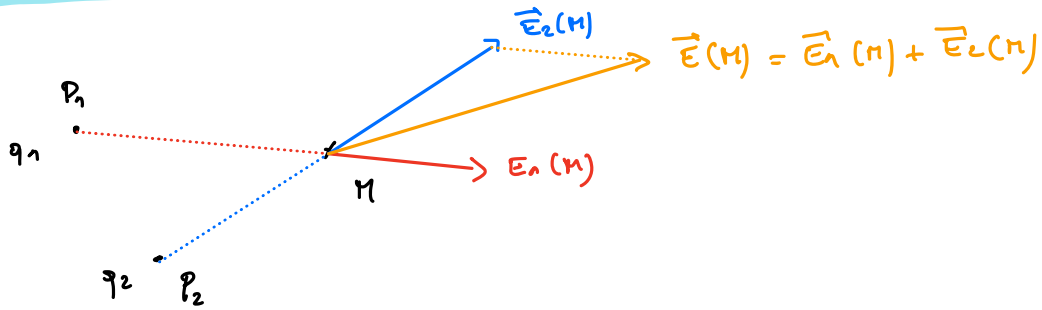
- une charge électrique  $q$  située au point  $P$  crée au point  $M$  un champ électrique  $\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

expression du champ électrique créée par une charge ponctuelle



### 1.3 Principe de superposition, distributions de charges

Si il y a plusieurs charges, le champ créé par l'ensemble est simplement la somme des champs créés par chacune des charges = principe de superposition

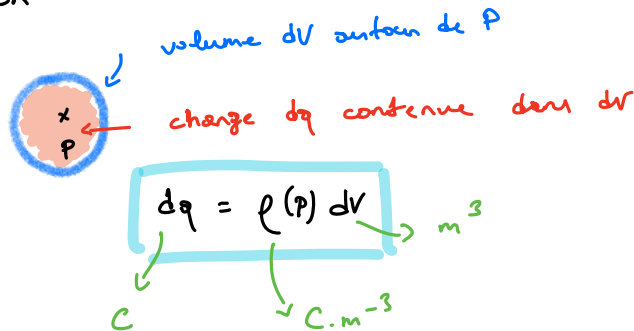


On peut écrire l'expression du champ électrique créé par un ensemble de charges ponctuelles (= distribution discrète de charges) :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\vec{P_i M}}{P_i M^3}$$

La plupart des cas intéressants sont décrits par des distributions continues de charges (c'est une approximation de la réalité, en fait les charges sont effectivement discrètes (proton, électron) / -

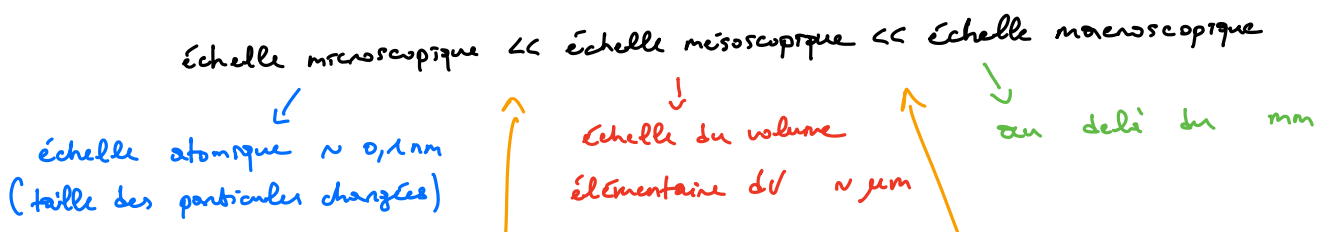
Une distribution continue de charges est décrite par la charge volumique  $\rho$  :



la charge volumique s'exprime en  $C \cdot m^{-3}$

(analogue avec la masse volumique en  $kg \cdot m^{-3}$ )

Rem : l'échelle (ordre de grandeur) du volume dV doit obéir à une double contrainte :



$dV$  doit contenir un grand nombre de charges

$dV$  doit être un infimum petit à l'échelle macroscopique

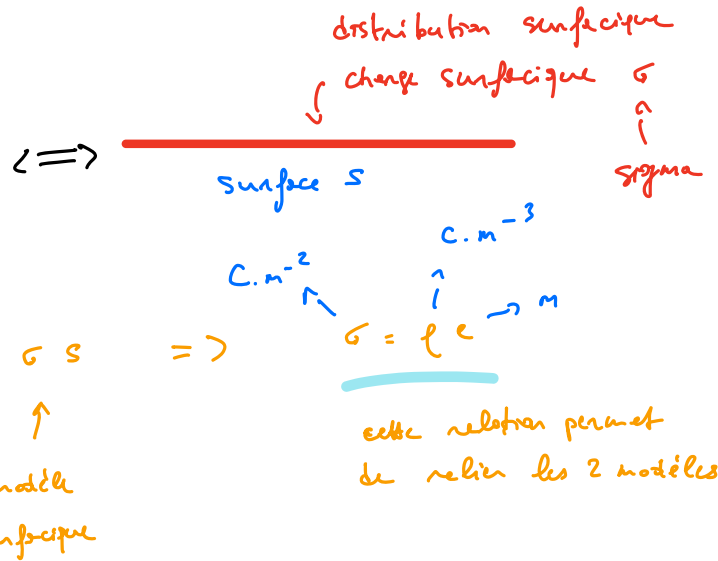
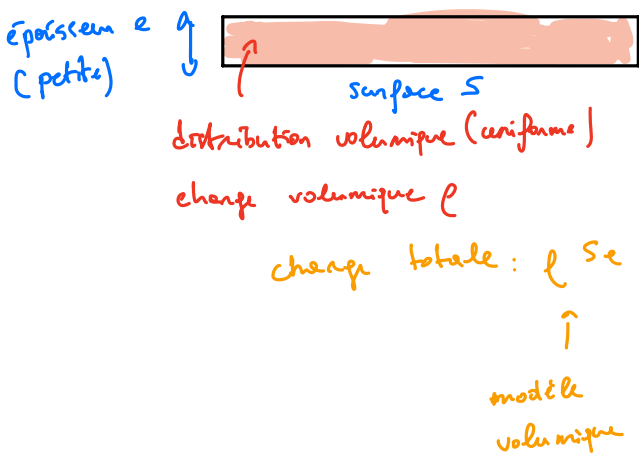
- expression du champ électrique pour une distribution continue (volumique) de charges :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \rho(P) dV \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

tout le volume où il y a des charges

On peut aussi considérer des distributions continues surfacique ou linéique :

- distribution surfacique : modèle pertinent quand les charges sont réparties sur une petite épaisseur.

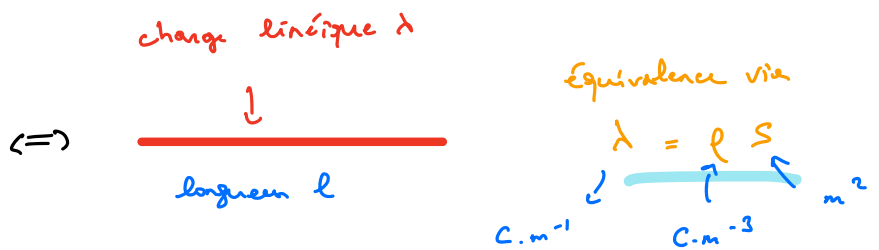
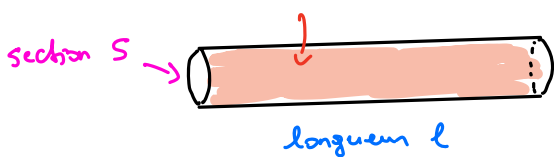


champ  $\vec{E}$  créé par une distribution surfacique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \sigma(P) dS \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

surface chargée

- distribution linéique  
charge volumique  $\rho$



# 1.4 Symétries - principe de Curie

On va avoir besoin, pour une distribution de charges donnée, de prévoir le bincchou du champ électrique.

On s'appuie sur le principe de Curie : " les effets ont au moins les symétries des causes "

principe très général, valable pour toute la physique

Pour le calcul des champs  $\vec{E}$  :

causes = distribution de charges

effets = champ  $\vec{E}$

$\Rightarrow$  " le champ  $\vec{E}$  a au moins les symétries de la distribution de charges "

- symétries pour les charges : on recherche des plans de symétrie (ou d'anti-symétrie)

avec des charges discrètes

$\pi$  (symétrie)

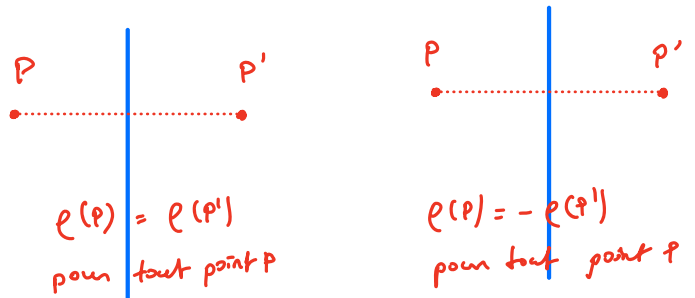
$\pi'$  (antisymétrie)



avec une distribution continue de charges

$\pi$  (symétrie)

$\pi'$  (antisymétrie)

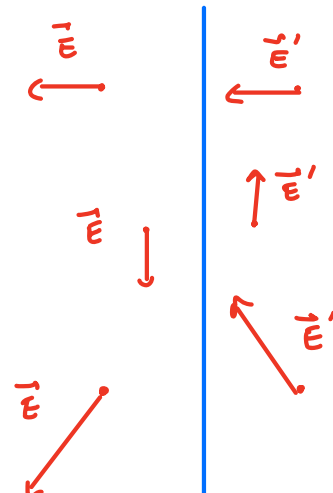
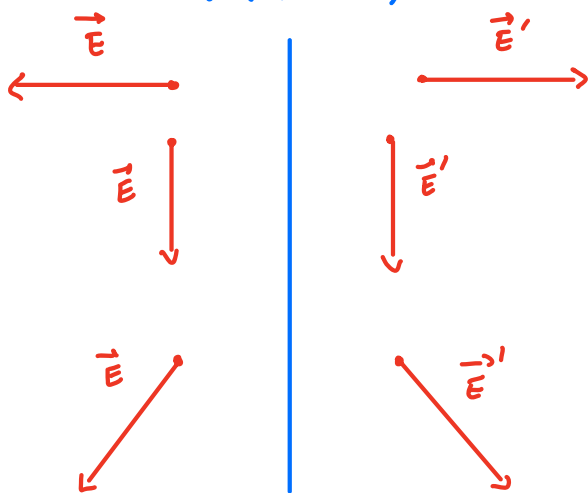


Rem : l'antisymétrie suppose qu'il y a des charges  $\oplus$  et des charges  $\ominus$

- symétries pour le champ  $\vec{E}$  :

$\pi$  (symétrie)

$\pi'$  (antisymétrie)



symétrique :

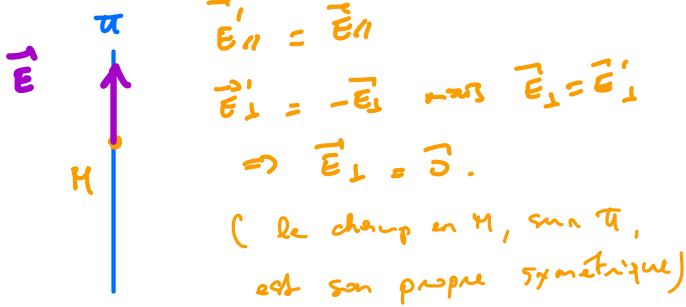
$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = -\vec{E}_{\perp} \end{cases}$$

anti-symétrique :

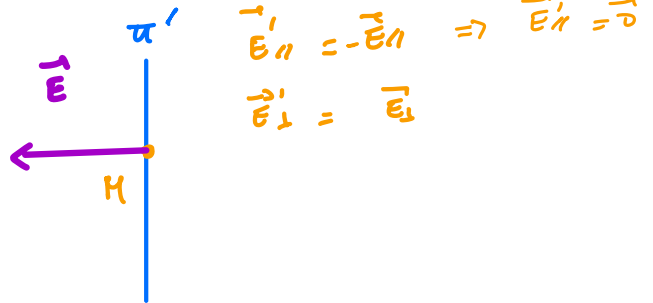
$$\begin{cases} \vec{E}'_{\parallel} = -\vec{E}_{\parallel} \\ \vec{E}'_{\perp} = \vec{E}_{\perp} \end{cases}$$

Conséquences sur la direction du champ en un point situé sur un plan  $\pi/\pi'$  :

• symétrie



• anti-symétrie

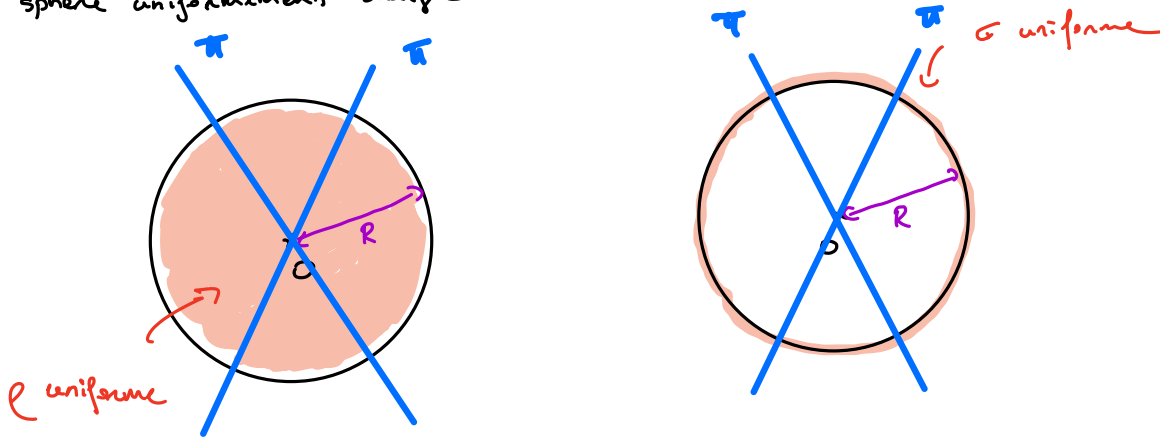


$\vec{E}$  est contenu dans  $\pi$

$\vec{E}$  est  $\perp$  à  $\pi'$

1.5 Exemples

• sphère uniformément chargée en volume (ou en surface) (ou charge ponctuelle ...)

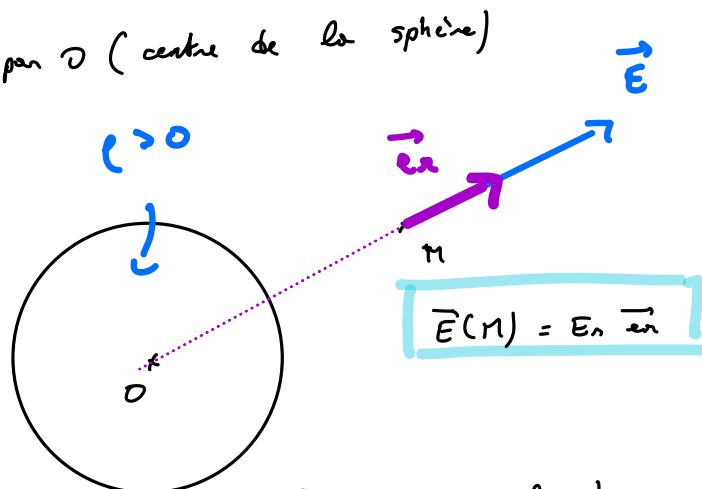


plans  $\pi$  = tout plan qui passe par  $O$  (centre de la sphère)

conséquence sur  $\vec{E}$  :

tous les plans qui contiennent la droite  $(OM)$  sont plans de symétrie et passent par  $M$ .

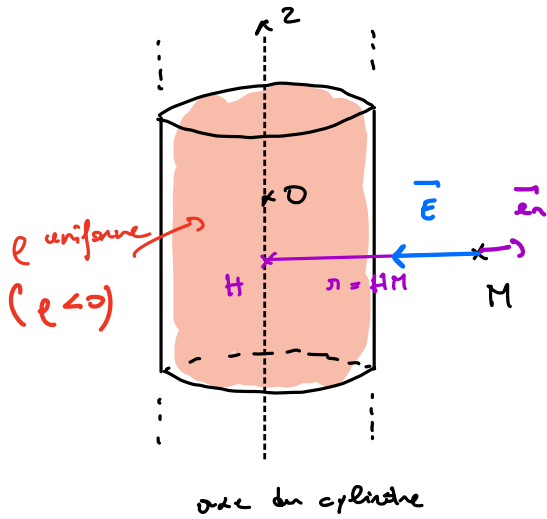
le champ  $\vec{E}$  est porté par leur intersection (il faut au moins 2 plans de symétrie pour conclure)



Avec une distribution à symétrie sphérique, le champ  $\vec{E}$  est radial (à partir de 0)

On utilise les coordonnées sphériques

- cylindre infini uniformément chargé en volume ou en surface ou un fil uniformément chargé en longueur



on utilise des coord. cylindriques  $(r, \theta, z)$

cylindre infini ?

c'est une approximation, légitime "pas trop hauteur born et pas trop près des bords"

on fait cette approximation car c'est plus simple à calculer



\* NON

\* OK

plans de symétrie d'une manière générale:

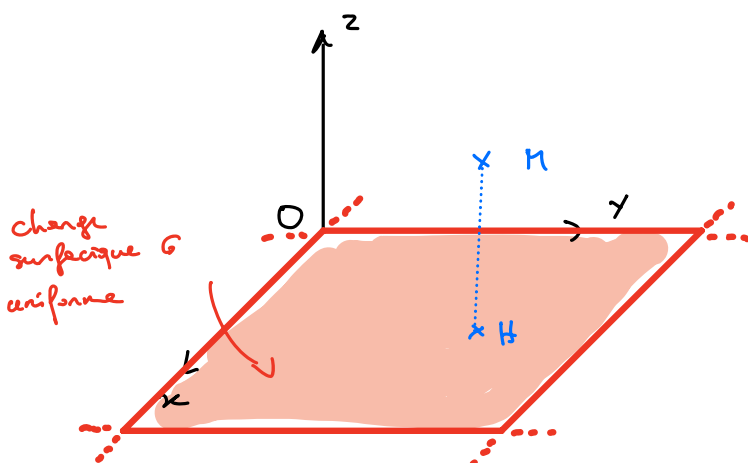
- plans qui contiennent  $(Oz)$

- plans orthogonaux à  $(Oz)$  → lié au caractère infini du cylindre

On trouve un plan de chaque type qui passe par M,  $\vec{E}$  est donc porté par leur intersection,  $(HM) \Rightarrow \vec{E}(M) = E_r \vec{e}_r$

champ  $\vec{E}$  radial (orthogonal à  $(Oz)$ )

- plan infini uniformément chargé en surface (ou petite épaisseur plane uniformément chargée en volume)



on utilise les coord. cartésiennes  $(Oz) \perp$  au plan chargé

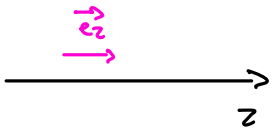
les plans de symétrie sont  $\perp$  au plan  $(Oxy)$  ( $\parallel$  à  $(Oz)$ ).

il y en a une infinité qui passent par M, tous ceux qui contiennent la droite  $(HM)$ .  $\Rightarrow \vec{E}(M) = E_z \vec{e}_z$

## 1.6 invariances

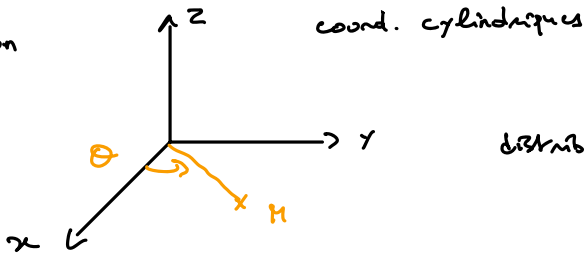
On se base toujours sur le principe de curie, mais dans le but de prévoir de quelle(s) coordonnée(s) dépend le champ électrique.  
Le principe est d'identifier des transformations géométriques (translation ou rotation) qui laissent la distribution de charges invariante.

• translation



distribution invariante par translation selon  $\vec{e}_z$   
 $\Rightarrow \vec{E}$  ne dépend pas de  $z$ .

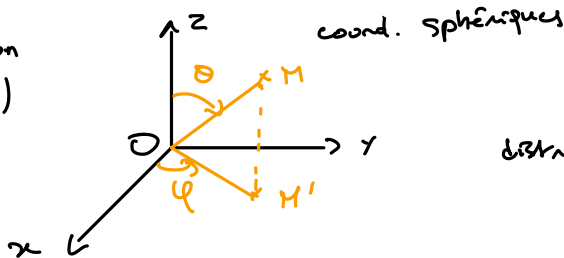
• rotation (axe)



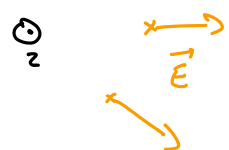
distribution invariante par rotation autour de  $(Oz)$   
 $\Rightarrow \|\vec{E}\|$  ne dépend pas de  $\theta$

⚠  $\|\vec{E}\|$  ne dépend pas de  $\theta$ ,  
mais  $\vec{E}$  si!

• rotation (point)



distribution invariante par rotation autour de  $O$   
 $\Rightarrow \|\vec{E}\|$  ne dépend pas de  $\theta$   
ni de  $\phi$



exemples :

• sphère uniformément chargée en volume :

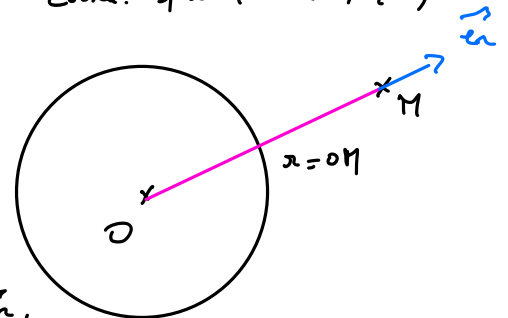
invariante par rotation autour du point  $O$

$\Rightarrow \|\vec{E}\|$  ne dépend pas de  $\theta$  ni de  $\phi$

On avait déjà, avec les symétries  $\vec{E}(r) = E_r \vec{e}_r$ ,

donc symétries + invariances  $\Rightarrow \vec{E}(r) = E_r(r) \vec{e}_r$  symétrie sphérique

coord. sphériques  $(r, \theta, \phi)$



• cylindre infini uniformément chargé en volume :

coord. cylindriques  $(r, \theta, z)$

invariance par translation selon  $(Oz)$

$\Rightarrow \vec{E}$  ne dépend pas de  $z$

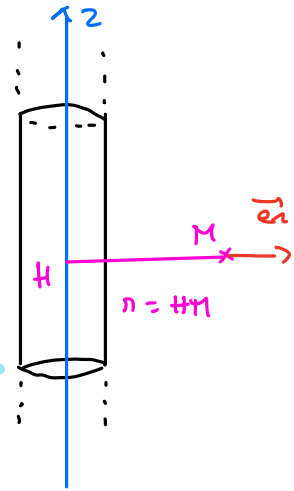
invariance par rotation autour de  $(Oz)$

$\Rightarrow \|\vec{E}\|$  ne dépend pas de  $\theta$

On avait avec les symétries  $\vec{E}(M) = E_n \vec{e}_n$

donc symétries + invariances  $\Rightarrow \vec{E}(M) = E_n(r) \vec{e}_n$

symétrie cylindrique



• plan infini uniformément chargé en surface:

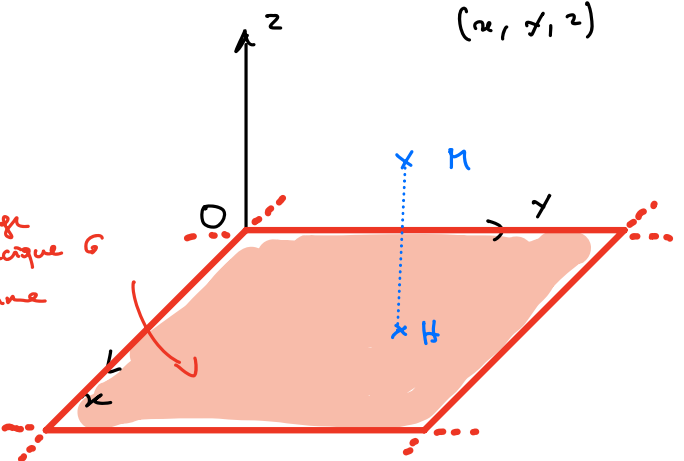
invariance par translation selon  $(Ox)$  et  $(Oy)$   $\Rightarrow \vec{E}$  ne dépend pas de  $x$  ni de  $y$

on avait avec les symétries

$\vec{E}(M) = E_z \vec{e}_z$ , donc

symétries + invariances  $\Rightarrow E(M) = E_z(z) \vec{e}_z$

charge  
surf. uniforme



Coord. cartésiennes  
 $(x, y, z)$

## 2. Théorème de Gauss

$\rightarrow$  c'est l'une des 4 lois fondamentales de l'électromagnétisme

$\rightarrow$  permet de calculer des champs  $\vec{E}$  si il y a "assez de symétries"

$\hookrightarrow$  on peut prévoir la direction avec les symétries

### 2.1 Flux du champ électrique

On définit le flux d'un champ de vecteurs au travers d'une surface.

$\hookrightarrow$  on associe un vecteur à tout point de l'espace

$$\Phi(\vec{E}/S) = \iint_S \vec{E} \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\vec{dS}}$$

Rem : - sens physique du flux : quantifie à quel point le champ traverse la surface.

souvent utilisé pour exprimer un débit,

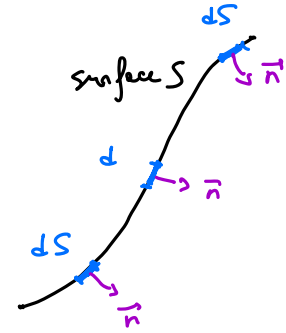
par ex :  $i = \iint_S (\underline{e} \cdot \underline{v}) \cdot \underline{dS}$

intensité = débit de charge électrique en  $A = C \cdot s^{-1}$

-  $\Phi(\underline{E}|S) = \iint_S \underline{E} \cdot \underline{n} \, dS$

on somme les flux élémentaires sur toute la surface S

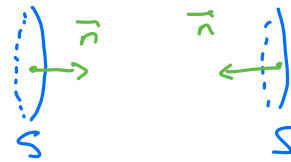
vecteurs unitaire localement orthogonal à la surface



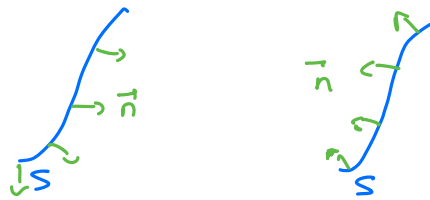
on peut noter  $d\Phi = \underline{E} \cdot \underline{n} \, dS$  : flux élémentaire (au travers de  $dS$ )

- convention d'orientation : on doit définir le sens dans lequel on traverse S  $\Rightarrow$  définir  $\underline{n}$ .

surface plane :



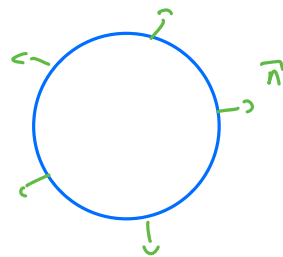
surface quelconque :



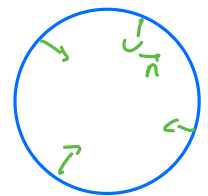
surface fermée :

définit (entourer) un volume

ex : sphère, cube, cylindre fermé par 2 disques



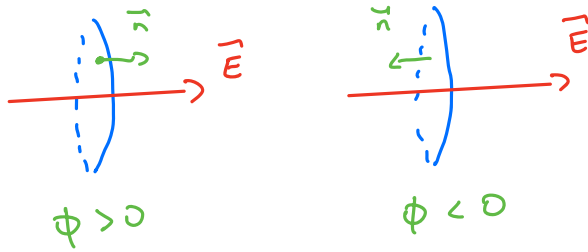
flux sortant



flux entrant



l'orientation est le signe du flux, par ex:



## 2.2 Théorème de Gauss

$$\Phi(\vec{E}/S) = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

↑ fermée      ↑ flux sortant

charge intérieure (à S)

$S$  (fermée)

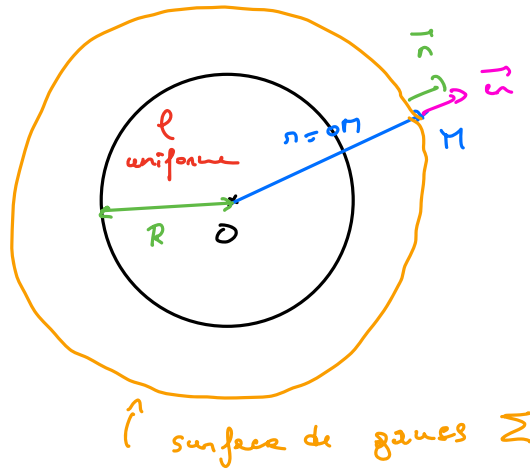
$Q_{int}$  = charge électrique contenue à l'intérieur de  $S$

cette loi n'est valable en régime variable -  
 c'est (sous forme intégrale) une des 4 équations de Maxwell -

## 2.3 sphère uniformément chargée en volume (et en surface)

On repère  $M$  en coord. sphériques  $(r, \theta, \varphi)$   
 symétriques + invariances :  $\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{u}_r$

choix de la surface de Gauss :  
 sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$ .  
 pourquoi ?



- $M$  est sur la surface
- $\Phi$  est simple à calculer car :

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \text{ et } \vec{n} \text{ sont soit orthogonaux soit colinéaires} \\ \|\vec{E}\| \text{ constant sur la surface} \end{array} \right.$

• calcul du flux :

$$\Phi(\vec{E}/\Sigma) = \iint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

avec  $\vec{E} = E_r(r) \vec{u}_r$  et  $d\vec{S} = dS \vec{u}_r$

donc  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = (E_r(r) \vec{u}_r) \cdot (dS \vec{u}_r) = E_r(r) \cdot dS$

donc  $\Phi(\vec{E}/\Sigma) = \iint_{\Sigma} E_r(r) dS = E_r(r) \cdot \iint_{\Sigma} dS$

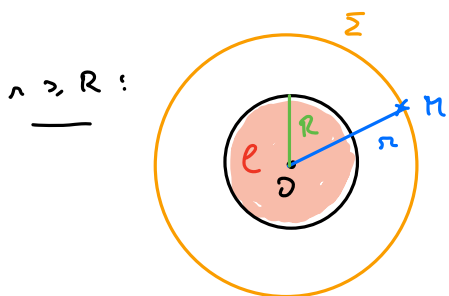
on "sort"

enfin,  $\oint_{\Sigma} dS = \text{aire de la sphère}$   
 $= 4\pi r^2$

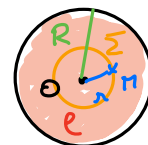
$E_n(r)$  de l'intégrale  
 car  $E_n(r)$  est  
 constant sur  $\Sigma$

Donc, finalement,  $\phi(\vec{E}|\Sigma) = E_n(r) \cdot 4\pi r^2$

- calcul de  $Q_{int}$ : 2 cas  $\rightarrow$  M à l'intérieur :  $r \leq R$   
 $\rightarrow$  M à l'extérieur :  $r \geq R$



$r \leq R$ :



$Q_{int} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$

$Q_{int} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = Q_{tot}$   
 (la totalité de la charge)

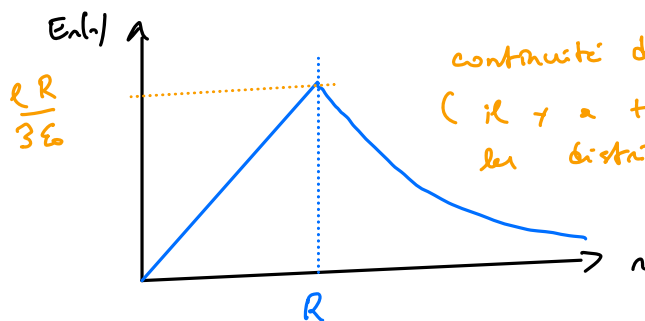
conclusion avec la th de gauss:  $\phi(\vec{E}|\Sigma) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

$\rightarrow r \leq R$ :  $4\pi r^2 E_n(r) = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$

$\rightarrow r \geq R$ :  $4\pi r^2 E_n(r) = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n(r) = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$

finalement:

$$\begin{cases} r \leq R: \vec{E}(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r \\ r \geq R: \vec{E}(r) = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \end{cases} \quad \left( = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \right)$$



continuité du champ en  $r=R$   
 (il y a toujours continuité avec  
 les distributions volumiques)

Rem: à l'extérieur, le champ est le même que si toute la charge  
 était concentrée au point 0 (= champ d'une charge ponctuelle)  
 (c'est le cas pour toute distribution à symétrie sphérique)

sphère chargée  
 en surface



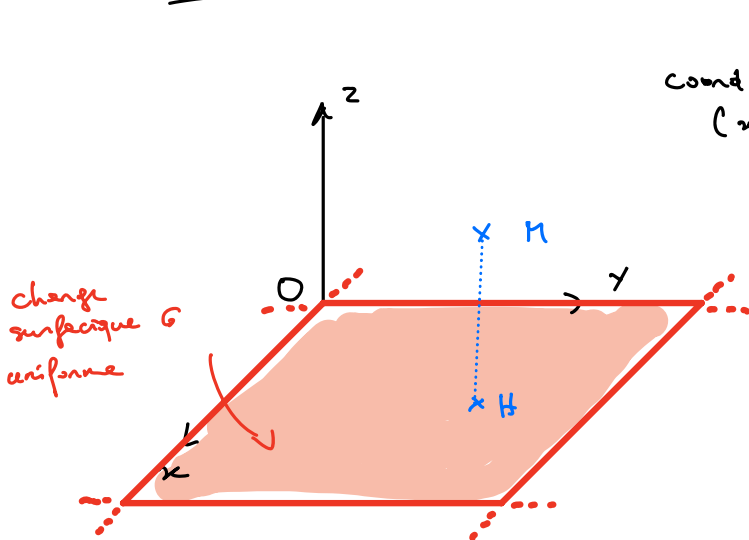
• calcul de  $Q_{int}$  :  $Q_{int} = \lambda h$  (longueur  $h$  de fil chargé si l'intérieur de  $\Sigma$ )

• conclusion avec Gauss :  $E_n(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E_n(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$

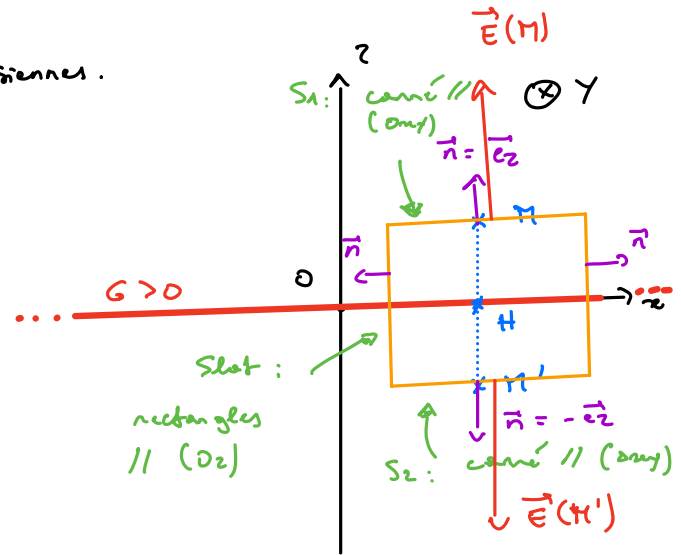
Enfinement :  $\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r$

sur le fil lui-même ( $r=0$ ), le champ n'est pas défini.

## 2.5 Plan infini uniformément chargé en surface



Coord. cartésiennes.  
(x, y, z)



On a vu que  $\vec{E}(M) = E_z(z) \vec{e}_z$

$M'$  = symétrique de  $M$  par rapport au plan  $(0xy)$

• surface de Gauss : pavé droit  $\Sigma = S_1 + S_2 + \text{Slot}$   
 ↙ ↘ ↙ ↘  
 carré carré ↘ les rectangles  
 symétrique par rapport au plan  $(0xy)$ .

↳ très important, car  $\vec{E}(M') = -\vec{E}(M)$ ,  
 puisque le plan  $(0xy)$  est plan de symétrie  
 pour les charges, et donc pour le champ.

• calcul du flux :  $\Phi(\vec{E}|\Sigma) = \Phi(\vec{E}|S_1) + \Phi(\vec{E}|S_2) + \Phi(\vec{E}|\text{Slot})$

avec  $\Phi(\vec{E}|S_1) = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} (E_z(z) \vec{e}_z) \cdot (dS \vec{e}_z)$

$= E_z(z) \iint_{S_1} dS = E_z(z) \cdot S_1$

= 0  
 car  $\vec{E} \perp \vec{n}$

même flux  
 au travers  
 de  $S_1$  et  $S_2$

$$\Phi(\vec{E}/S_2) = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} (-E_z(z) \vec{e}_z) \cdot (-dS \vec{e}_z) = E_z(z) \iint_{S_2} dS$$

$$= E_z(z) \cdot S_2$$

$$= E_z(z) \cdot S_1$$

car  $S_2 = S_1$

$$\vec{E}(z) = -\vec{E}(z) = -E_z(z) \vec{e}_z$$

et  $\vec{n} = -\vec{e}_z$

Donc  $\Phi(\vec{E}/S) = 2 E_z(z) \cdot S_1$

- calcul de  $Q_{int}$ :  $Q_{int} = G \cdot S_1$  une  $S_1$  de plan chargé à l'intérieur de  $\Sigma$ .
- conclusion avec gauss:  $2 E_z(z) \cdot S_1 = \frac{G \cdot S_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E_z(z) = \frac{G}{2\epsilon_0}$

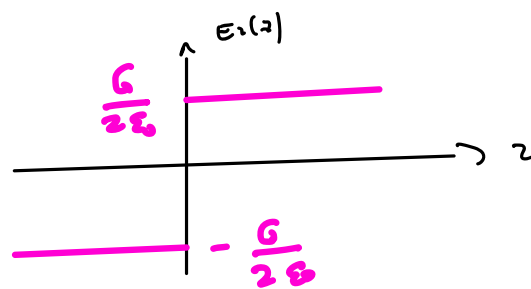
finalement,

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{G}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{G}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

en  $z=0$ , le champ n'est pas défini, mais ça a un sens de dire qu'il est nul.



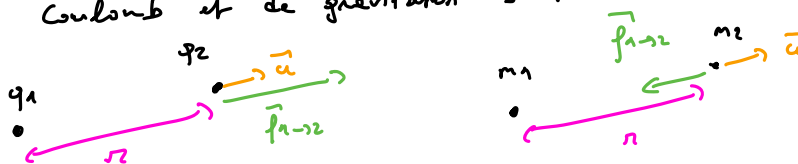
le champ est uniforme dans chaque 1/2 espace ( $z > 0$  et  $z < 0$ )



champ non nul à l'infini ?  
pour un plan chargé réel, de taille finie, l'approximation ne fonctionne que proche du plan chargé

## 2.6 Gravitation

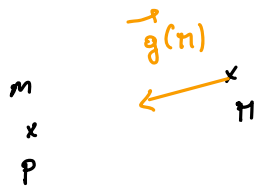
les forces de Coulomb et de gravitation sont très analogues:



$$\vec{f}_{a \rightarrow b} = \frac{q_a q_b}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

$$\vec{f}_{a \rightarrow b} = -G \frac{m_a m_b}{r^2} \vec{u}$$

On peut définir le champ de gravitation :



$$\vec{g}(M) = -G m \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

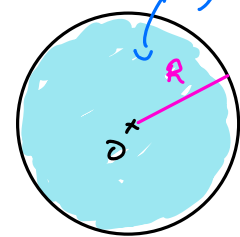
et une masse  $m'$  au point  $M$  subit la force  $\vec{f} = m' \vec{g}(M)$

$$= -G m m' \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$

Analogies :

<u>Electrostatique</u>		<u>gravitation</u>
charge $q$	← →	masse $m$
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	← →	$-G$
champ $\vec{E}$	← →	champ $\vec{g}$
théorème : $\Phi(\vec{E}/\Sigma) = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$	← →	$\Phi(\vec{g}/\Sigma) = -4\pi G M_{int}$

On établit, par analogie avec  $\vec{E}$ , le champ de gravitation pour une sphère avec une masse volumique  $\mu$  uniforme :

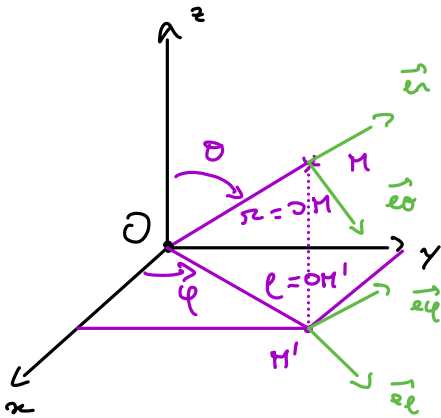


$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{r^n}{3\epsilon_0} \vec{e}_r & r \leq R \\ \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & r > R \end{cases}$$

$$\vec{g} = \begin{cases} -\frac{\mu r}{3} 4\pi G \vec{e}_r & r \leq R \\ -\frac{G M_{tot}}{r^2} \vec{e}_r & r > R \end{cases}$$

le champ de gravitation créé par la terre est le même que si toute sa masse était concentrée en son centre. ceci justifie de considérer la terre comme une masse ponctuelle (!) dans de nombreuses situations.

# Coordonnées sphériques



"double coord planes":  
 → M repéré par  $(r, \theta)$  de la plan  $(OMM')$   
 → M' repéré par  $(\rho, \varphi)$  de la plan  $(OMx)$

coord sphériques  $(r, \theta, \varphi)$   
 base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

Rem: les coord géographiques latitude / longitude sont un repérage en coord. sphériques. avec  $(Oz)$  = axe des pôles (vers le nord) et  $\lambda = \pi/2 - \theta$  ( $\lambda$  = angle entre  $\vec{OM}$  et le plan  $(Oxy)$  = plan équateur) et longitude =  $\varphi$  avec  $(Ox)$  dans le plan du méridien de Greenwich

lien cartésiennes / sphériques:

$$z = r \cos \theta$$

$$\rho = r \sin \theta \Rightarrow x = \rho \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$\vec{e}_1 = \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{e}_\rho$$

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \text{ etc ...}$$

• déplacement élémentaire:  $d\vec{l} = dr \vec{e}_1 + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$

• volume élémentaire:  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$

• calcul du volume d'une sphère de rayon R:

$$V = \iiint_{\text{sphère}} dV = \iiint_{\text{sphère}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \int_0^R r^2 dr \times \int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$\underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{\left[ \frac{r^3}{3} \right]_0^R} = \frac{R^3}{3}$ 
 $\underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{\left[ -\cos \theta \right]_0^\pi} = 2$ 
 $\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$

donc  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

$$S = \iint_{\text{sphère}} dS = \iint_{\text{sphère}} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$\underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_2 \times \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$

$\Rightarrow S = 4\pi R^2$

### 3. Potentiel électrique

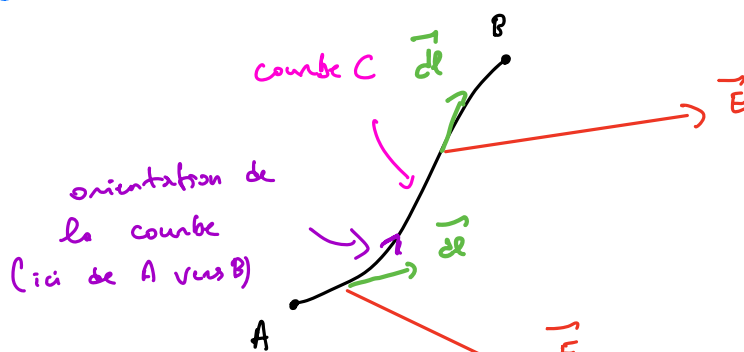
#### 3.1 Circulation du champ électrique

circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe:

$$\mathcal{C}(\vec{E}/C) = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

courbe

déplacement élémentaire le long de la courbe C

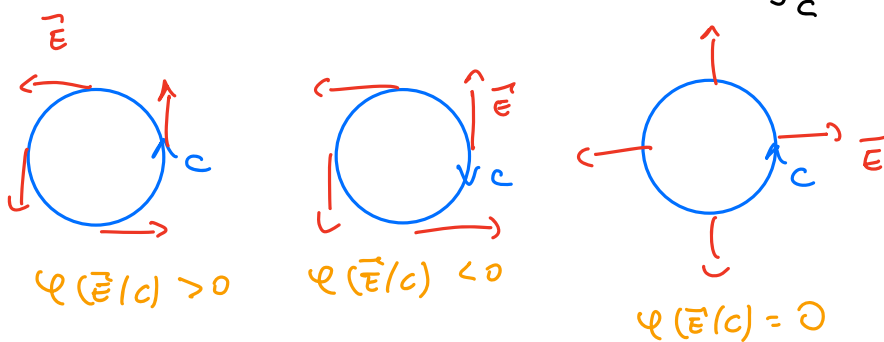


le déplacement élémentaire  $d\vec{l}$  est tangent à la courbe C en chacun de ses points.

On peut noter  $d\mathcal{C} = \vec{E} \cdot d\vec{l}$  un "morceau" de circulation (circulation élémentaire) et voir  $\mathcal{C}$  comme la somme des  $d\mathcal{C}$  le long de C :

$$\mathcal{C} = \int_C d\mathcal{C} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

illustration :



• circulation du champ  $\vec{E}$  créé par une charge ponctuelle :

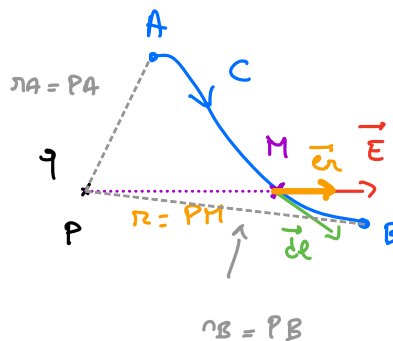
on utilise les coordonnées sphériques

avec comme origine P.

Alors,  $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

au point M

et  $d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{e}_\phi$



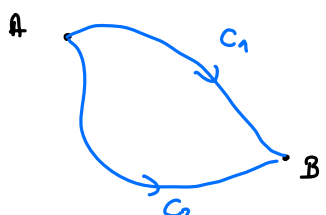
Donc  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr$

D'où  $\varphi(\vec{E}/C) = \int_C \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B}$

finalement,  $\varphi(\vec{E}/C) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$  ⚠  $\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}$  alors que C est orientée de A vers B !

On remarque que :

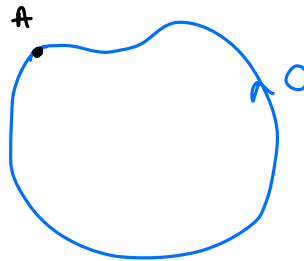
- la circulation d'un point A à un point B est indépendante du chemin suivi

entre A et B :   $\varphi(\vec{E}/C_1) = \varphi(\vec{E}/C_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$

- en particulier, la circulation le long d'une courbe fermée est nulle :

$\varphi(\vec{E}/C) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_A} \right) = 0$

"on revient au même point"



une courbe fermée entoure une certaine surface

- ce qui est valable pour une charge ponctuelle est, d'après le théorème de superposition, valable pour n'importe quel ensemble de charges :

$\varphi(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 / C) = \varphi(\vec{E}_1 / C) + \varphi(\vec{E}_2 / C)$

Conclusion : la circulation du champ électrique (créé par n'importe quelle distribution de charges) est nulle le long d'une courbe fermée

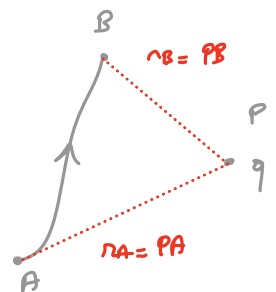
$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$

2<sup>e</sup> loi de l'électromagnétisme (mais n'est valable qu'en régime stationnaire)  $\Rightarrow$  loi de Faraday en régime variable

### 3.2 Potentiel électrique

On vient de voir :  $\varphi_{AB}(\vec{E}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$

↑  
circulation de  $\vec{E}$   
le long d'une courbe



entre A et B

Comme  $\varphi_{AB}(\vec{E})$  ne dépend que des positions de A et B, on peut poser :

$$\varphi_{AB}(\vec{E}) = V_A - V_B \quad \text{avec} \quad V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \quad \text{et} \quad V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

↑ potentiel électrique créé au point A par la charge q en P
 ↑ idem au point B

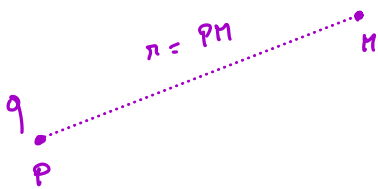
On retrouve "variation de potentiel" = circulation du champ électrique



$$\varphi_{AB} = V_A - V_B$$

↑  
 circulation en allant de A vers B

On en déduit l'expression du potentiel électrique créé par une charge ponctuelle :



$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

à priori, à une constante près (comme tous les potentiels) mais on fait toujours le choix  $V \rightarrow 0$  pour  $r \rightarrow \infty \Rightarrow c^{\text{th}} = 0$ .

Pour des distributions de charges (principe de superposition) :

• discrète :  $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (+ c^{\text{th}})$

• continue (volumique) :  $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(P) dV}{r} \quad (+ c^{\text{th}})$

Dimensionnellement, le potentiel est en Volts

$$3.3 \quad \vec{E} = - \text{grad}(V)$$

On reprend  $\varphi_{AB}(\vec{E}) = \int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl}$ , et on a aussi écrit  $\varphi_{AB}(\vec{E}) = V_A - V_B = - (V_B - V_A)$

D'où  $\int_A^B \vec{E} \cdot \vec{dl} = \int_A^B -dV$

$$= - \int_{V_A}^{V_B} dV$$

Et donc

$$dV = - \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

une petite variation de potentiel est égale à l'opposé de la circulation

$$= \int_A^B -dV$$

élémentaire.

cette relation est utile pour déterminer le potentiel à partir du champ.

Et dans l'autre sens (c'est-à-dire de  $\vec{E}$  à partir de  $V$ ) ?

Commençons en 1D :  $V$  ne dépend que de  $x$ ,  $\vec{E} = E_x \vec{e}_x$  et  $d\vec{l} = dx \vec{e}_x$

$$\text{alors } dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ donne } dV = -E_x dx$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{dV}{dx} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x$$

On généralise à 3D :

$$V(x, y, z)$$

$$\begin{cases} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = - \underbrace{\left( \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z \right)}_{\text{grad}(V)}$$

Soit

$$\vec{E} = -\text{grad}(V)$$

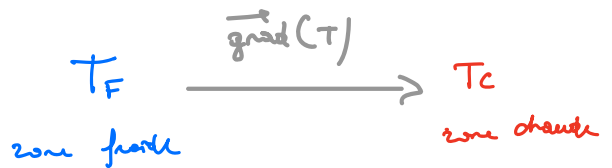
$\vec{E}$  est dirigé des potentiels élevés vers les potentiels faibles (dans le sens des potentiels décroissants)

Le gradient est un opérateur vectoriel champ scalaire  $\rightarrow$  champ vectoriel,

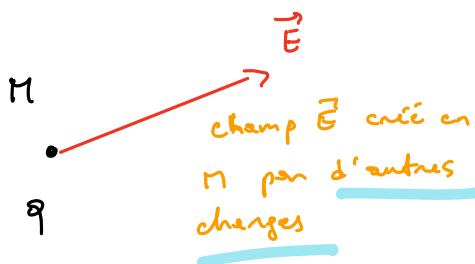
pour un champ scalaire  $f(x, y, z)$  quelconque :

$$\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

sens  $\nabla$  du gradient d'un champ scalaire  $f$  : dirigé des faibles valeurs de  $f$  vers les valeurs élevées (ex : gradient de température)



### 4. Energie potentielle électrostatique



La charge  $q$  subit la force électrique

$$\vec{f} = q \vec{E}$$

$$\text{on, } \vec{E} = -\text{grad}(V), \text{ donc } \vec{f} = q (-\text{grad}(V))$$

$$\Rightarrow \vec{f} = -\text{grad}(qV)$$

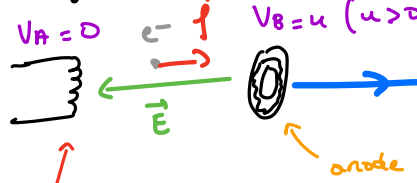
On, on a vu en mécanique qu'une force conservative est liée à son énergie potentielle par  $\vec{f} = -\text{grad}(ep)$

On en déduit l'énergie potentielle associée à la force électrique:

$$ep = qV$$

Application :

charge accélérée par une ddp.



$V_B = U$  ( $U > 0$ , de l'ordre de 99 milliers de volts)  
faisceau homogène d'électrons

canon à électrons  
(il faut être dans le vide)

⇒ émet des électrons

vitesse des  $e^-$  en B, au niveau de l'anode (et ensuite) ?

conservation de l'énergie mécanique entre A et B :

$$e c_A + e p_A = e c_B + e p_B = -e V_B$$

" " " " " "

0 "  $-e V_A$  "  $\frac{1}{2} m v_B^2$

(car  $V_A = 0$ )

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 = e (V_B - V_A)$$

$$\Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

A.N avec  $U = 1000 \text{ V}$  :

$$v_B = \sqrt{\frac{2 \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^3}{9 \cdot 10^{-31}}} = \sqrt{4 \cdot 10^{14}} = 2 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$c$  est inférieur à  $c = 3 \cdot 10^8$ ,

" tout va bien " ---

sinon ... il aurait fallu utiliser la relativité ---

### 3.5 Calculs de potentiels

2 méthodes : • calcul direct avec  $V(\pi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$  (cas discret)

$$V(\pi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\rho) dV}{r_{\pi}} \quad (\text{cas continu})$$

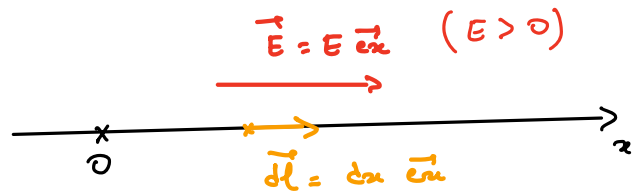
on ne l'utilisera pas en pratique - (HP)

• si on a  $\vec{E}$  (donc on a pu calculer  $\vec{E}$  avec Gauss)

démarche : on écrit  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$  et on intègre (sans oublier la constante!)

exemples : • champ  $\vec{E}$  uniforme

On se place en 1D



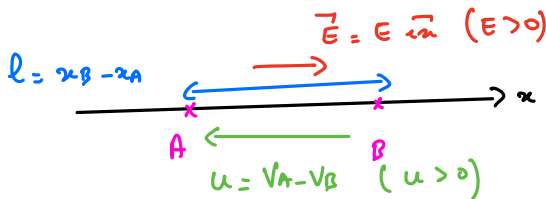
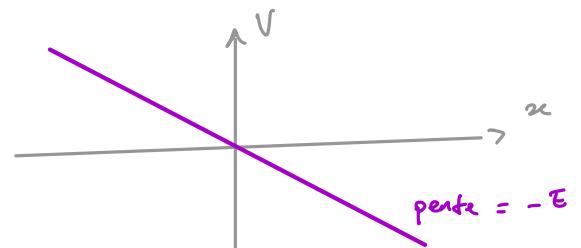
$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = - (E \vec{e}_x) \cdot (dx \vec{e}_x) = -E dx$$

on intègre :  $V = -Ex + c$

On choisit par exemple  $V(x=0) = 0 \Rightarrow c = 0$

D'où  $V = -Ex$

$V$  (Volt)       $V \cdot m^{-1}$        $m$

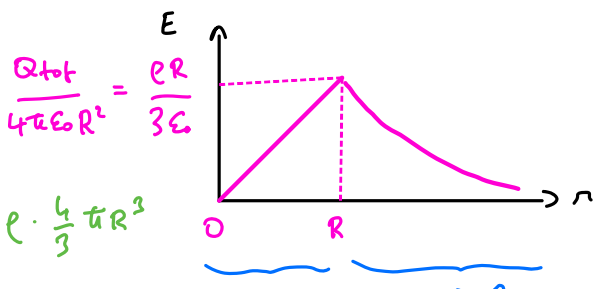


$V_A > V_B$  ( $\vec{E}$  dirigé vers les potentiels ↓)

relation entre  $u$  et  $E$  ?  $u = V_A - V_B = (-Ex_A) - (-Ex_B) = E(x_B - x_A) = E \cdot l$

d'où  $u = E \cdot l$  dans le cas où  $E$  est uniforme

• sphère uniformément chargée en volume



• On commence par le cas  $r > R$  :

$$V = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r}$$

comme pour une charge ponctuelle, chose de la constante :  $V \rightarrow 0$  pour  $r \rightarrow \infty$  ("potentiel nul à l'infini")

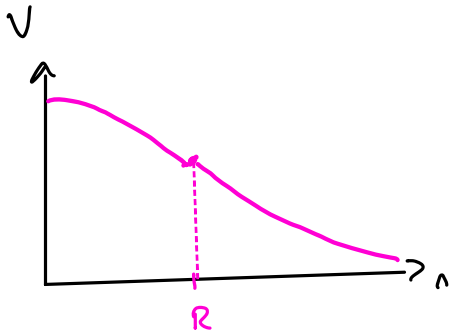
$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

• car  $r \leq R$ : on utilise les coord. sphériques

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r \quad \text{et} \quad d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{e}_\phi$$

$\perp \vec{e}_r$



Il y a toujours continuité du potentiel, même à la traversée des surfaces chargées.

d'où  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr$

On intègre:  $V = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + c^{th}$

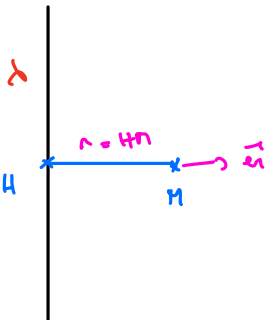
Pour calculer la constante, on doit "recommander" avec l'autre cas en  $r = R$ :

$$-\frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} + c^{th} = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow c^{th} = \frac{\rho R^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

D'où  $V = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$

• fil infini:



$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

coord. cylindriques

$$d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

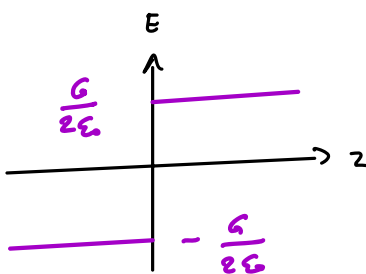
$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr$$

$$\Rightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + c^{th}$$

pour fixer la constante, on ne peut pas choisir  $V=0$  ni pour  $r=0$  ni pour  $r \rightarrow \infty$  ...  
disons  $V=0$  pour  $r=r_0$   
 $\Rightarrow c^{th} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r_0)$

$$\Rightarrow V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

• plan infini uniformément chargé: (coord. cartésiennes,  $d\vec{l} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$ )



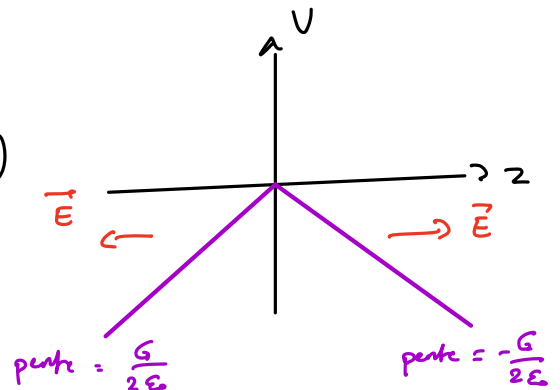
pour  $z > 0$ :  $\vec{E} = \frac{G}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$

$$\Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{G}{2\epsilon_0} dz$$

$$\Rightarrow V = -\frac{G}{2\epsilon_0} z \quad (\text{on prend } c^{th} = 0)$$

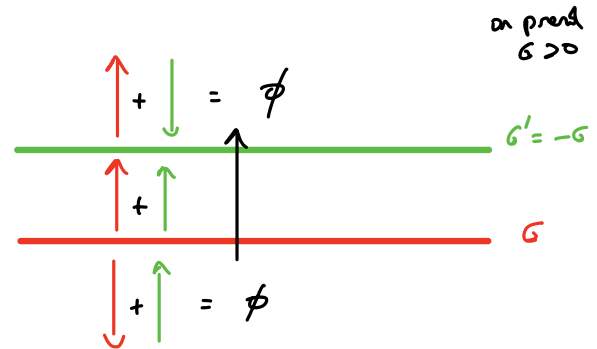
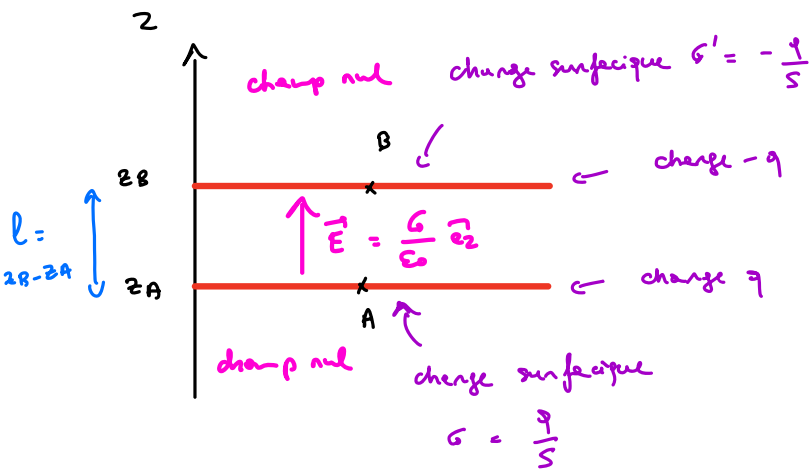
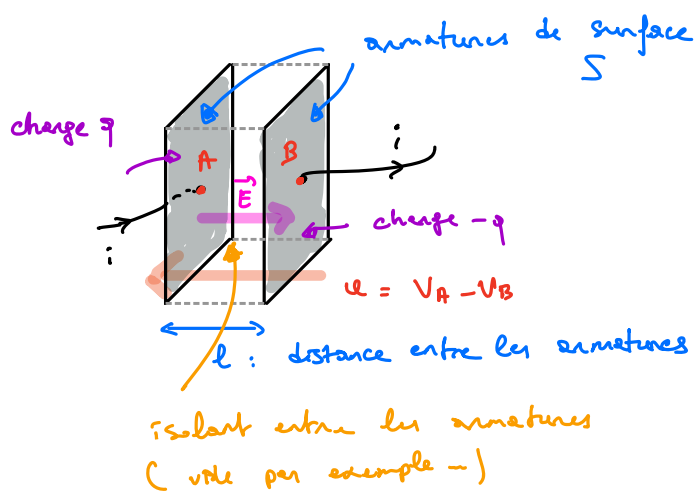
pour  $z < 0$ :  $\vec{E} = -\frac{G}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$

$$\Rightarrow V = +\frac{G}{2\epsilon_0} z$$



### 3.6 Condensateur plan

condensateur plan = 2 plaques métalliques (armatures) "en regard" (parallèles, l'une en face de l'autre)



les champs des 2 armatures s'ajoutent à l'intérieur du condensateur et s'annulent à l'extérieur.

expression du champ entre les armatures :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z + -\frac{\sigma'}{2\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Soit  $\vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0 S} \vec{e}_z$

Calcul du potentiel :  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$   
 $= -\frac{q}{\epsilon_0 S} dz$

$$\Rightarrow V = -\frac{q}{\epsilon_0 S} z + c^{ste}$$

On en déduit la tension  $u = V_A - V_B$  :  $u = \left( -\frac{q}{\epsilon_0 S} z_A + c^{ste} \right) - \left( -\frac{q}{\epsilon_0 S} z_B + c^{ste} \right)$   
 $= \frac{q}{\epsilon_0 S} (z_B - z_A) = \frac{q l}{\epsilon_0 S}$

On en déduit la capacité du condensateur plan définie par  $q = C u$  :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{l}$$

*(F (Farad))*  
 *$\epsilon_0$  : F.m<sup>-1</sup>*  
*S : m<sup>2</sup>*  
*l : m*

Rem : expression valable pour du vide entre les armatures avec un autre isolant, on multiplie par  $\epsilon_r$  → permittivité relative, caractéristique de l'isolant (diélectrique)

ordre de grandeur :  $S = 1 \text{ cm}^2$  /  $l = 0,1 \text{ mm}$   
 $C = \frac{9 \cdot 10^{-12} \times 10^{-4}}{10^{-4}} = 9 \cdot 10^{-12} \text{ F}$  (9 pF)

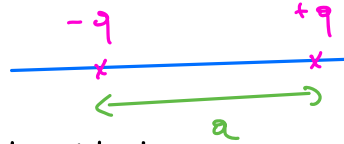
### 3.7 Topographie, ordres de grandeur

- ligne de champ : courbe tangente au champ (Électrique) en tout point.
- Equipotentielle : sur

# 4. Dipôle électrique

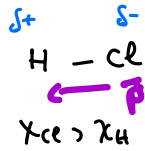
## 1. Présentation

dipôle = 2 charges opposées

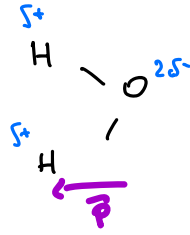
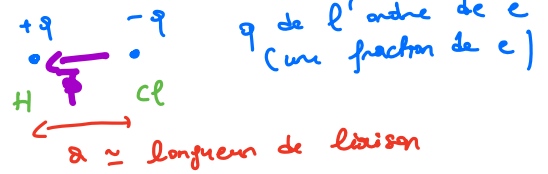


cela permet de modéliser différentes situations:

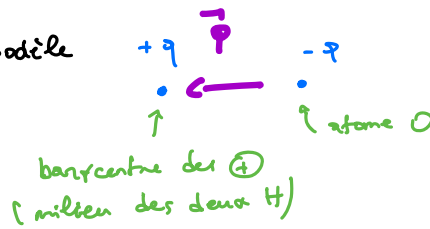
- molécule polaire (dipôle permanent)



=> modèle

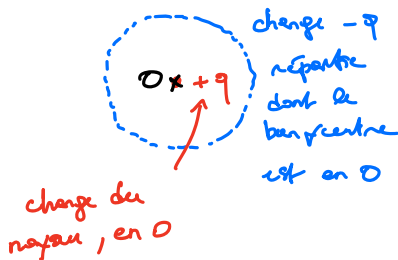


=> modèle

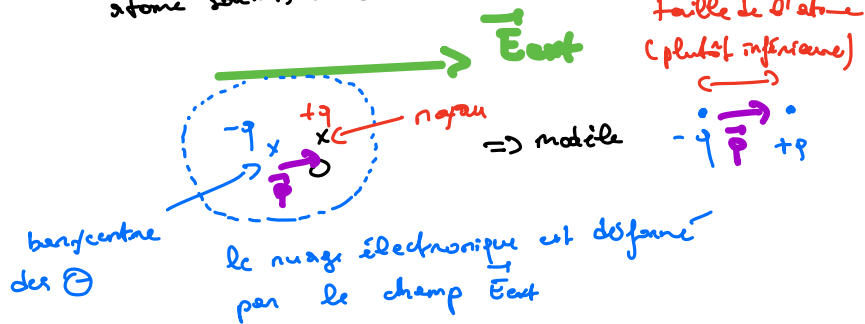


- atome soumis à un champ  $\vec{E}$  extérieur: (dipôle induit)

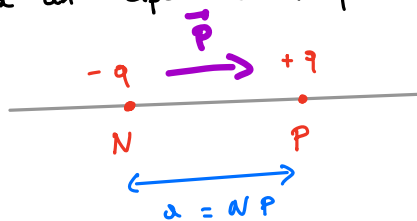
atome au repos



atome soumis à  $\vec{E}$  extérieur



On associe à un dipôle électrique un moment dipolaire:



$\vec{p} = q \vec{NP}$  dirigé de  $-q$  vers  $+q$   
 $p = \|\vec{p}\| = q a$

C.m   C

Ordre de grandeur: exemple de HCl (ou n'importe quelle molécule diatomique):

unité des chimistes: le Debye (D)    $p = q a$  avec  $q = e$  ( $e$  est exagéré, on fait comme si le transfert d' $e^-$  était total)

$1 D = \frac{1}{3} \cdot 10^{-29} \text{ C}\cdot\text{m}$

$a \approx 10^{-10} \text{ m}$  (longueur de liaison typique)

p.ex: HCl    $p = 1,08 \text{ D}$

donc  $p \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \times 10^{-10} = 1,6 \cdot 10^{-29} \text{ C}\cdot\text{m}$

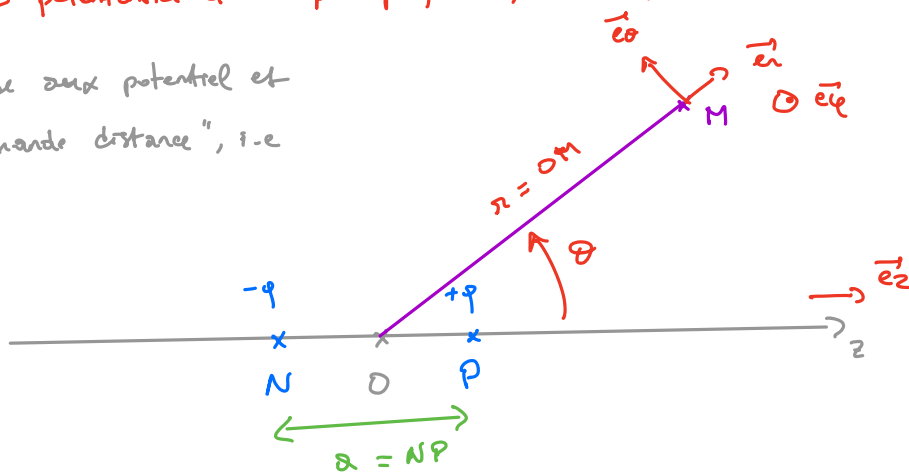
H<sub>2</sub>O    $p = 1,85 \text{ D}$

## 4.2 Potentiel et champ créés à grande distance

↳ potentiel et champ "propres", créés par le dipôle lui-même

On s'intéresse aux potentiel et champ "à grande distance", i.e

$$r \gg a$$



$(\vec{e}_n, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  base orthogonale directe

On utilise les coord. sphériques, on ne représente pas  $\varphi$  (qui permet de tourner autour de l'axe  $(Oz)$ )

symétries : • le plan  $(Oxy)$ ,  $\perp$  à  $(Oz)$  et qui passe par  $O$  est plan d'antisymétrie  $\Rightarrow$  sur ce plan, le champ  $\vec{E}$  est selon  $\vec{z}$ .

• tout plan qui contient  $(Oz)$  est plan de symétrie

$\Rightarrow$  par la composante de  $\vec{E}$  sur  $\vec{e}_\varphi$  :  $\vec{E}(M) = E_n \vec{e}_n + E_\theta \vec{e}_\theta$

invariances : par rotation autour de  $(Oz)$   
 $\Rightarrow$   $\|\vec{E}\|$  ne dépend pas de  $\varphi$ .

on a une info, mais c'est insuffisant pour appliquer Gauss.

conclusion :  $\vec{E}(M) = E_n(r, \theta) \vec{e}_n + E_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$

On effectue le calcul via le principe de superposition, en commençant par le potentiel :

$$V(M) = V_N(M) + V_P(M)$$

↳ crée par le charge  $-q$  au point  $N$   
 ↳ crée par le charge  $+q$  au point  $P$

$$\text{donc } V(M) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{NM} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{PM}$$

$$\text{soit } V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right)$$

On développe les expressions de  $\frac{1}{PM}$  et  $\frac{1}{NM}$  en tenant compte de  $r \gg a$  (approximat. au 1<sup>o</sup> ordre avec un DL).

$$\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM} \quad (\text{Chasles})$$

$$= -\frac{a}{2} \vec{e}_z + r \vec{e}_n$$

et on développe le carré scalaire :

$$\begin{aligned} PM^2 &= \vec{PM} \cdot \vec{PM} \\ &= \left( -\frac{a}{2} \vec{e}_z + n \vec{e}_1 \right) \cdot \left( -\frac{a}{2} \vec{e}_z + n \vec{e}_1 \right) \\ &= \frac{a^2}{4} + n^2 + 2 \left( -\frac{a}{2} \right) n \vec{e}_z \cdot \vec{e}_1 \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \vec{e}_z \cdot \vec{e}_1 = \cos(\vec{e}_z, \vec{e}_1) = \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } PM^2 &= \frac{a^2}{4} + n^2 - a n \cos \theta \\ &= n^2 \left( 1 - \frac{a}{n} \cos \theta + \frac{a^2}{4n^2} \right) \end{aligned}$$

négligeable (2<sup>e</sup> ordre en  $a/n$  :  $\frac{a}{n} \ll 1 \Rightarrow \frac{a^2}{n^2} \ll \frac{a}{n}$ )

$$\approx n^2 \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{n} \right) \quad (1^{\text{er}} \text{ ordre})$$

$$\text{On en déduit } \frac{1}{PM} : \frac{1}{PM} = (PM^2)^{-1/2} = \left( n^2 \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{n} \right) \right)^{-1/2} = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{n} \right)^{-1/2}$$

$$\text{Or, } \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{n} \right)^{-1/2} \approx 1 + (-1/2) \left( -\frac{a \cos \theta}{n} \right) = 1 + \frac{a \cos \theta}{2n}$$

de la forme  $(1+u)^x = 1 + xu$  au 1<sup>er</sup> ordre ( $u \ll 1$ )

$$\text{Donc } \frac{1}{PM} \approx \frac{1}{n} \left( 1 + \frac{a \cos \theta}{2n} \right)$$

$$\text{De même, } \frac{1}{NM} = \frac{1}{n} \left( 1 - \frac{a \cos \theta}{2n} \right) \quad \left( \text{refaire le calcul en travaillant le cours...} \right)$$

$$\text{On revient à } V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} \right) : \frac{1}{PM} - \frac{1}{NM} = \frac{a \cos \theta}{n^2}$$

$$\text{Donc, finalement, } V(M) = \frac{2q \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 n^2}$$

$$\text{or, } aq = p \Rightarrow$$

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 n^2}$$

Rem : décroissance en  $1/n^2$

Ⓝ  $1/n$  pour le potentiel d'une charge ponctuelle ;

les potentiels des 2 charges se compensent pour l'essentiel.

On en déduit ensuite le champ  $\vec{E}$  :

$$\vec{E} = -\text{grad}(V) = - \left( \frac{\partial V}{\partial n} \vec{e}_n + \frac{1}{n} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{n \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)$$

$$= 0 \text{ car}$$

$V$  ne dépend pas de  $\varphi$

$$\text{Or, } \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$\text{finalement, } \vec{E} = -\left( -\frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left( -\frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \right) \vec{e}_\theta \right)$$

$$\text{et donc } \boxed{\vec{E} = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)}$$

Rem :  $\vec{E}$  en  $1/r^3$   
 $\odot$   $1/r^2$  pour charge ponctuelle

Rem : on peut écrire ceci  $\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^3} (3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p})$

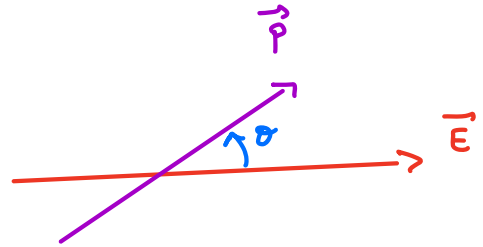
### 4.3 Action d'un champ $\vec{E}$ extérieur sur un dipôle

↳ crée par d'autres charges que le dipôle lui-même.

- cas d'un champ extérieur  $\vec{E}$  uniforme :

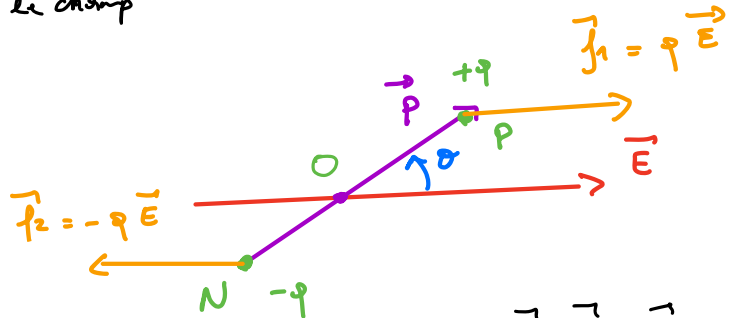
→ pas d'effet de déplacement global du dipôle (résultante des forces nulle)

→ effet d'orientation: le dipôle a tendance à s'aligner sur le champ



Calcul du couple (moment des forces):

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{M}_O(\vec{f}_1) + \vec{M}_O(\vec{f}_2) \\ &= \vec{OP} \wedge \vec{f}_1 + \vec{ON} \wedge \vec{f}_2 \\ &= (\vec{OP} - \vec{ON}) \wedge \vec{f}_1 \quad \text{car } \vec{f}_2 = -\vec{f}_1 \\ &= \underbrace{\vec{NP}} \wedge (q\vec{E}) \end{aligned}$$



on voit que, effectivement,  $\vec{f}_1 + \vec{f}_2 = \vec{0}$   
 ⇒ résultante nulle

Donc  $\vec{C} = \vec{NP} \wedge (q\vec{E})$  et donc  $\boxed{\vec{C} = \vec{p} \wedge \vec{E}}$

$$= \underbrace{q \vec{NP}}_{\vec{p}} \wedge \vec{E}$$

calcul de l'énergie potentielle:

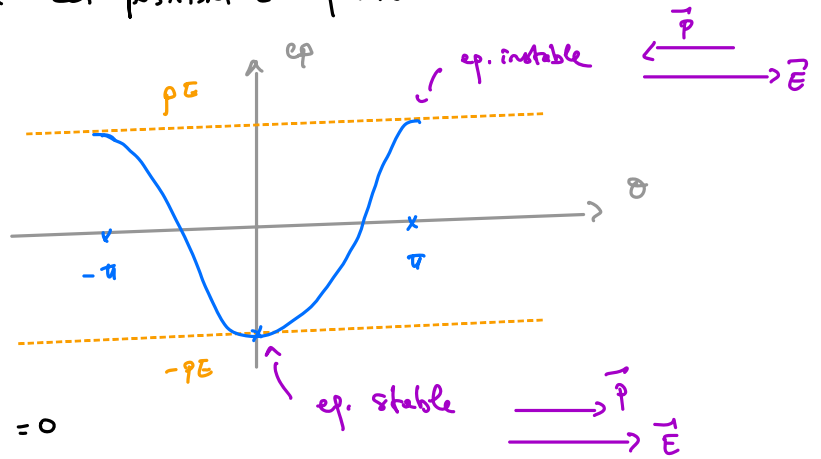
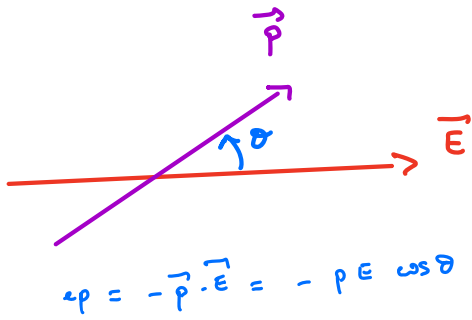
$$e_p = e_p(-q) + e_p(+q) = -q V(N) + q V(P) = q (V(P) - V(N))$$

$$\text{Or, } V(P) - V(N) = - \int_N^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \vec{E} \cdot \underbrace{\int_N^P d\vec{\ell}}_{\vec{NP}} = - \vec{E} \cdot \vec{NP}$$

$\vec{E}$  uniforme

D'ici  $ep = q(-\vec{E} - \vec{NP}) = - \underbrace{qNP}_{\vec{p}} \cdot \vec{E}$  donc  $ep = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Cette expression permet de discuter des positions d'équilibre et de leur stabilité:

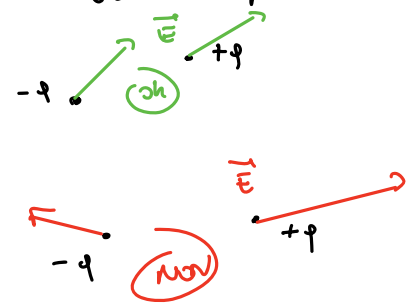


rappel : ep. stable = mm. d'ep  $\begin{cases} \frac{d^2 ep}{d\theta^2} > 0 \\ \frac{d ep}{d\theta} = 0 \end{cases}$

ep. instable = max d'ep  $\begin{cases} \frac{d^2 ep}{d\theta^2} < 0 \\ \frac{d ep}{d\theta} = 0 \end{cases}$

• cas d'un champ non uniforme, avec  $\vec{E}$  qui varie peu à l'échelle du dipôle

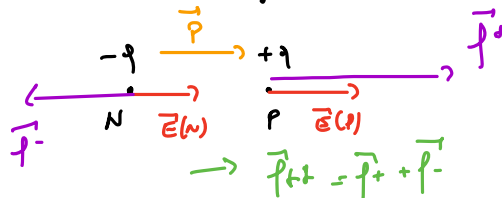
Alors,  $\begin{cases} \vec{C} = \vec{p} \wedge \vec{E} \\ ep = -\vec{p} \cdot \vec{E} \end{cases}$  restent approximativement valables.



conséquences : - il y a toujours l'effet d'orientation (alignement du dipôle sur le champ)

- il y a en plus une force résultante, dirigée vers les zones de fort champ électrique

qualitativement :



le champ  $\vec{E}$  ↑ en allant vers la droite, la force résultante est vers la droite

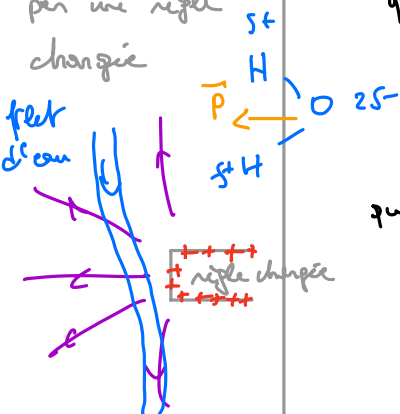
quantitativement :  $\vec{F} = -\text{grad}(ep)$  avec  $ep = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE$

donc  $\vec{F} = -\text{grad}(-pE) = p \text{grad}(E)$

dirigé vers les zones de fort champ  $\vec{E}$ , indépendamment de sa direction / sens

illustration :

déviation d'un filet d'eau par une règle chargée



$\vec{E}$  d'autant + intense qu'on est proche de la règle