Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 7 : 4 au 8 novembre 2024

Questions de cours

- ☐ Comme d'habitude, savoir citer toute définition, toute proposition du cours.
- ☐ Montrer que la réunion d'une famille d'ouverts de E est un ouvert de E et que l'intersection d'une famille finie d'ouverts de E est un ouvert de E.
- ☐ Montrer que la boule fermée $B_f(A, R)$ est un fermé de E de trois manières différentes :
  - complémentaire d'un ouvert ;
  - par caractérisation séquentielle ;
  - par image réciproque d'un fermé par une application continue.
- ☐ Montrer que $\overline{A}$ est le plus petit fermé de E qui contient A.
- ☐ Soient $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. Alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si pour tout suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers ℓ.
- ☐ Montrer que l'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

Chapitre 7 : Normes et suites à valeurs dans un espace vectoriel normé

III Équivalence de normes

III.1 Définition

- normes équivalentes. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes.

III.2 Invariance du caractère borné, du caractère convergent

- si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes et si A est une partie de E, alors A est bornée pour $\|\cdot\|_1$ si et seulement si A est bornée pour $\|\cdot\|_2$.
- si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, alors (u_n) converge vers ℓ pour la norme $\|\cdot\|_1$ si et seulement si (u_n) converge vers ℓ pour la norme $\|\cdot\|_2$.

III.3 Exemples et contre-exemples

- dans $\mathbb{R}^2$, les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.
- pour montrer que deux normes <u>ne sont pas</u> équivalentes, il suffit de trouver une suite qui est bornée pour l'une et non pour l'autre, ou bien de trouver une suite qui converge pour l'une et non pour l'autre.

Chapitre 8 : Topologie d'un espace vectoriel normé

I Topologie

I.1 Ouverts

- parties ouvertes (ou *ouverts*) de E.
- toute boule ouverte est un ouvert.
- la réunion d'une famille quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E.
- l'intersection d'une famille finie d'ouverts de E est un ouvert de E.
- un produit fini d'ouverts est un ouvert.
- voisinage d'un point. Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points. Si $\mathcal{V}$ est un voisinage de a et si (u_n) converge vers a, alors il existe un rang à partir duquel la suite (u_n) est à valeurs dans $\mathcal{V}$.

I.2 Fermés

- parties fermées (ou *fermés)* de E.
- toute boule fermée est un fermé.
- l'intersection d'une famille quelconque de fermés de E est un fermé de E.
- la réunion d'une famille finie de fermés de E est un fermé de E.
- un produit fini de fermés est un fermé.
- caractérisation séquentielle des fermés.

I.3 Invariance des ouverts et des fermés par équivalence des normes

- si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes et si A est une partie de E, alors A est un ouvert (resp. un fermé) pour $\|\cdot\|_1$ si et seulement si A est un ouvert (resp. un fermé) pour $\|\cdot\|_2$.

I.4 Intérieur, adhérence, frontière

- point intérieur, intérieur $\mathring{A}$.
- $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.
- point adhérent, adhérence $\overline{A}$.
- caractérisation séquentielle des points adhérents.
- $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
- frontière ∂A.

I.5 Parties denses

- partie dense dans E.
- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

I.6 Topologie induite

- ouvert relatif, fermé relatif, voisinage relatif.
- caractérisation séquentielle des fermés.

II Limites et continuité de fonctions

II.1 Limites de fonctions

- limite en un point adhérent à une partie A. Traduction de la définition en termes de boules.
- caractérisation séquentielle, unicité de la limite.
- extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ si $A \subset \mathbb{R}$, limite infinie pour une fonction réelle.
- opérations sur les limites : combinaison linéaire, multiplication par une fonction scalaire, inverse d'une fonction scalaire, limite d'une composée.
- applications à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

II.2 Continuité en un point

- continuité ponctuelle. Caractérisation séquentielle.
- si f est continue en a et si g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.
- prolongement par continuité.

II.3 Applications continues

- application continue. Restriction d'une application continue.
- combinaison linéaire, composition de deux fonctions continues.
- l'application norme est continue. L'application $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p \mapsto x_k \in E_k$, où $E_1 \times \cdots \times E_p$ est muni de la norme produit, est continue.
- image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.
- deux fonctions continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Hors programme cette semaine :

Équivalence de normes en dimension finie.
Continuité uniforme, applications lipschitiziennes, application $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$
Continuité des applications linéaires, multilinéaires
Compacts, connexes par arcs.