# Centre et matrice d'inertie

Un modèle dynamique permet de prédire les efforts auxquels va être soumis le système (liaisons, pièces, etc.) lors de son fonctionnement qui fait intervenir des accélérations importantes.

Pour élaborer ce modèle dynamique, des caractéristiques inertielles propres aux pièces doivent être définies. Au cours de cette séquence de dynamique nous aurons deux systèmes « fil-rouges » : des yoyos et une voiture de modélisme que nous verrons en TD.

## 1. Notion de masse et de centre d'inertie

### 1.1. Hypothèses et notations

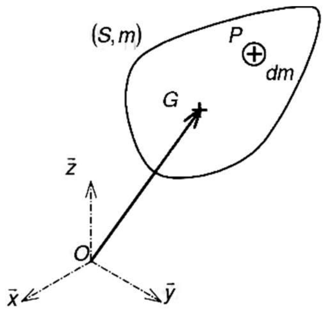
En dynamique (comme en statique), les solides sont considérés comme :

- indéformables ;
- homogènes.

On notera :

- $S$ le solide considéré ;
- $V$ le volume du solide $S$ ($m^3$) ;
- $dV$ un petit élément de volume situé autour d'un point $P$ de $S$ ($m^3$) ;
- $\rho$ la masse volumique du solide S, supposée uniforme ($kg/m^3$) ;
- $dm = \rho . dV$ la masse de l'élément de volume $dV$ (kg) ;
- $m$ la masse du solide $S$ (kg).

Pour simplifier les notations, on utilisera souvent des intégrales simples à la place des intégrales doubles ou triples, mais ce n'est qu'une simplification de notation :




$$m = \iiint_V \rho . dV = \int_V \rho . dV = \int_V dm$$

### 1.1 Rappel : repère et référentiel Galiléen

- Un **repère (d'espace)** est constitué d'un **point d'origine $\boldsymbol{O}$ et d'une base orthonormée** $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On note $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
- Un **repère de temps** est un **repère unidimensionnel** orienté dans le sens de la succession des événements dans le temps.
- On appelle **repère galiléen** un repère d'espace fixe ou en translation rectiligne uniforme par rapport à l'ensemble de l'univers. **Son accélération absolue est alors nulle.** Pour une étude mécanique des systèmes industriels courants, **un repère lié à la Terre** constitue une bonne approximation du repère galiléen.
- Un **référentiel galiléen** est donc un **repère galiléen associé à un repère de temps.**

## 1.2. Centre d'inertie

| | |
|---|---|
| **Centre d'inertie G** | Le centre d'inertie d'un solide $S$ est le point $G$ tel que, pour un point $P$ quelconque : $$m.\overrightarrow{OG} = \int_V \overrightarrow{OP}.\rho.dV = \int_V \overrightarrow{OP}.dm$$ Pour le calculer, on cherche $\overrightarrow{OG}$ par intégration. L'équation est valide quel que soit le point $O$ choisi. Il ne faut pas oublier de simplifier le problème grâce aux symétries du solide (voir ci-dessous). |

| | |
|---|---|
| **Centre de gravité** | Le centre de gravité du solide S est le point auquel l'action mécanique de la pesanteur (du poids) se résume à un glisseur (torseur des AM avec moment nul). $$\int_{P\in S} \overrightarrow{GP}.dm = \vec{0}$$ |

**Remarques importantes :**

- Si le champ de pesanteur est uniforme, **centre d'inertie et de gravité sont confondus, ce qui sera toujours le cas en SI.**
- Si le solide $S$ possède un **élément de symétrie** (plan, axe ou centre), le **centre de gravité**, ou centre d'inertie, **appartiendra** forcément **à cet élément de symétrie.**

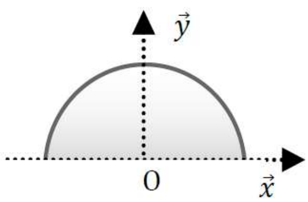
*Exemple* : Où se trouve le centre de gravité de l'effecteur de cette imprimante 3D delta ?

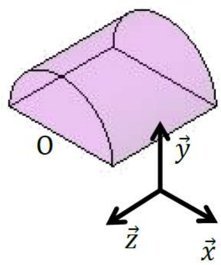
⇒ À l'intersection des 3 plans de symétrie, donc sur un axe. Reste à déterminer à quelle position sur l'axe par intégration.

## 1.3. Exemple de calcul de centre d'inertie

On note G le centre d'inertie d'un demi-cylindre de rayon R et d'épaisseur e.

Simplification du problème grâce aux symétries :




$$\overrightarrow{OG} = y_G.\vec{y} - \frac{e}{2}.\vec{z}$$

Calcul de $y_G$ :

$$m.\overrightarrow{OG} = \int_V \overrightarrow{OP}.\rho.dV$$

$$m.\left(y_G.\vec{y} - \frac{e}{2}.\vec{z}\right) = \rho.\int_V r.\overrightarrow{e_r} + z.\vec{z}.r.dr.d\theta.dz$$

On cherche seulement la composante suivant $\vec{y}$ :

$$m.y_G = \rho.\int_V r^2.(\vec{e_r}.\vec{y}).dr.d\theta.dz$$

$$m.y_G = \rho.\int_V r^2.\sin\theta\,.dr.d\theta.dz$$

$$m.y_G = \rho.\int_{r=0}^{r=R} r^2.dr\,.\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \sin\theta\,.d\theta\,.\int_{z=-e}^{z=0} dz$$

$$m.y_G = \rho.\frac{R^3}{3}.2.e$$

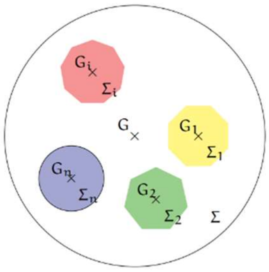
or $m = \rho.\frac{\pi.R^2}{2}.e$

$$\Rightarrow\ y_G = \frac{4}{3\pi}.R \text{ et } \overrightarrow{OG} = \frac{4}{3\pi}.R.\vec{y} - \frac{e}{2}.\vec{z}$$

### 1.4. Cas d'un ensemble de solide

Soit $S$ un ensemble matériel discret de masse $m$ et de centre de gravité $G$, soit une partition de $S(m,G)$ en $n$ éléments $S_i(m_i, G_i)$, alors :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\overrightarrow{OG_i}$$




**Attention**, pour des solides avec un enlèvement de matière (des trous par exemple), on pourra considérer **un solide plein** (sans les enlèvements de matière) **et un solide correspondant au retrait de masse** (donc avec une « masse négative »).

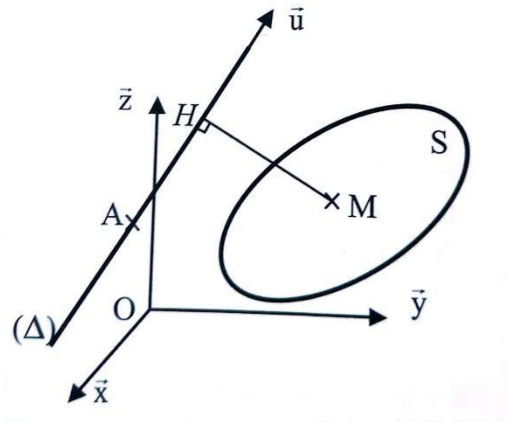
## 2. Éléments d'inertie

### 2.1. Moment d'inertie

L'inertie d'un solide est sa résistance à tout changement de mouvement.

En particulier, **un moment d'inertie est la résistance à tout changement de rotation** :

- Si le solide est au repos, le moment d'inertie représente la résistance à sa mise en rotation.
- Si le solide est déjà en rotation, le moment d'inertie représente la résistance à tout changement de cette rotation, que ce soit pour la ralentir, l'arrêter ou l'accélérer davantage.




Soit $M$ un point quelconque de $S$, un repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, avec $\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$ et un axe $\Delta = (A, \vec{u})$. On note $H$ la projection orthogonale du point $M$ sur l'axe $\Delta$.

Le moment d'inertie du solide $S$ par rapport à l'axe $\Delta$ est le scalaire positif :

$$I_{S/\Delta} = \int_V (\overrightarrow{HM})^2 dm$$

Remarques :

- On se servira de moments d'inertie pour calculer les moments cinétiques et dynamiques.
- Ce moment traduit la répartition de la masse autour de l'axe de rotation.

## 2.2. Matrice d'inertie

En considérant les différents moments d'inertie d'un solide, on définit la matrice d'inertie.

**Matrice d'inertie $[I]_{O,S}$ d'un solide $S$ en un point $O$**

La matrice d'inertie du solide $S$ (de volume $V$) au point $O$ est défini par :

$$[I]_{O,S}.\vec{u} = \int_V \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}).dm$$

La matrice d'inertie est représentée par une **matrice symétrique 3×3** :

$$[I]_{O,S} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ **et** $\boldsymbol{C}$ **sont les moments d'inertie** par rapport aux axes $(O,\vec{x})$, $(O,\vec{y})$ et $(O,\vec{z})$ :

$$A = \int_V (y^2+z^2).dm \qquad B = \int_V (x^2+z^2).dm \qquad C = \int_V (x^2+y^2).dm$$

$\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ **et** $\boldsymbol{F}$ **sont les produits d'inertie** par rapport aux plans $(O,\vec{y},\vec{z})$, $(O,\vec{x},\vec{z})$ et $(O,\vec{x},\vec{y})$ :

$$D = \int_V y.z.dm \qquad E = \int_V x.z.dm \qquad F = \int_V x.y.dm$$

**$[I]_{O,S}.\vec{u}$ n'a de sens que si $[I]_{O,S}$ et $\vec{u}$ sont exprimés dans la même base !**

**Remarque** : La matrice d'inertie ne dépend que de la répartition de sa masse. Les solides étant considérés homogènes, la matrice d'inertie ne dépend que de la forme du solide.

## 2.3. Opérateur d'inertie

On appelle $\vec{I}_{O,S}(\vec{u})$ le vecteur opérateur d'inertie de $S$ par rapport à l'axe dont le vecteur directeur est $\vec{u}$ le vecteur défini par :

$$\vec{I}_{O,S}(\vec{u}) = [I]_{O,S}.\vec{u}$$

L'inertie de $S$ par rapport à l'axe défini par $\vec{u}$ est :

$$I_{S/\vec{u}} = \vec{u}.([I]_{O,S}.\vec{u}) = \vec{u}.\vec{I}_{O,S}(\vec{u})$$

Remarques :

- Ainsi il est possible de déterminer l'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque à partir de sa matrice d'inertie, et en particulier son opérateur d'inertie.
- On retrouve les moments d'inerties et les opérateurs d'inertie dans la matrice d'inertie :

$$[I]_{O,S} = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Moment d'inertie (scalaire) $I_{S/\vec{z}} = \vec{z}.\vec{I}_{O,S}(\vec{z})$

Vecteur $\vec{I}_{O,S}(\vec{x})$

## 2.4. Base propre d'inertie

La matrice d'inertie est réelle et symétrique, par conséquent elle est diagonalisable et possède un système de trois vecteurs propres orthogonaux.

| | |
|---|---|
| Base propre d'inertie | La base propre d'inertie, ou base principale d'inertie, est la base dans laquelle la matrice d'inertie du solide $S$, exprimé à son centre de gravité $G$, est diagonale. |

Remarques :

- Si cette base propre d'inertie est $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, alors les axes $(G, \vec{x})$, $(G, \vec{y})$ et $(G, \vec{z})$ sont les **axes propres d'inertie ou axes principaux d'inertie.**
- Les moments d'inertie de la matrice d'inertie diagonale sont des **moments principaux d'inertie.**
- Le solide est **dynamiquement équilibré** autour de ces axes : **il ne générera pas de vibrations** lors de sa rotation autour de ces axes.

**Notion d'équilibrage d'un solide en rotation autour d'un axe Δ :**

- **équilibrer statiquement** le solide revient à placer son centre de gravité sur l'axe Δ.
- **équilibrer dynamiquement** le solide revient à s'assurer que l'axe Δ est l'un des axes propres d'inertie

$$\text{Équilibrage dynamique} \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} \text{Équilibrage statique}$$

*Exemples de système avec ou sans équilibrage :*

*Vibreur de téléphone* - Un solide qui n'est pas équilibré (statiquement et dynamiquement), génère un balourd (des vibrations) lors de sa rotation. Dans certains systèmes, comme le vibreur de téléphone représenté ci-contre, le déséquilibre est volontaire pour créer les vibrations.

*Roue de voiture* - Le but de l'équilibrage des roues, pratiqué à chaque montage de pneumatique sur une jante, est d'éviter les vibrations à haute vitesse. La tenue de route est améliorée et l'usure des pneumatiques est réduite.

## 2.5. Propriétés des matrices d'inertie

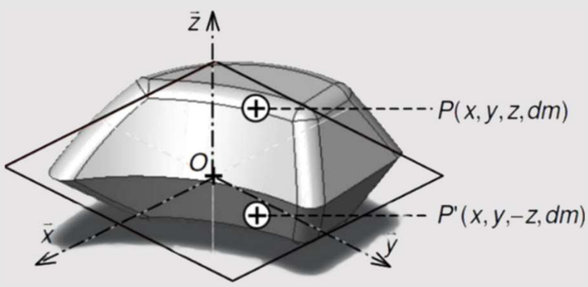
### 2.5.1. Symétrie par rapport à un plan

Si $S$ possède un plan de symétrie $(O, \vec{x}, \vec{y})$, alors sa matrice d'inertie exprimée en un point $O$ de son plan de symétrie se met sous la forme :

$$D = \int_V y.z.dm = 0$$

$$E = \int_V x.z.dm = 0$$

$$\Rightarrow [I]_{S,O} = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



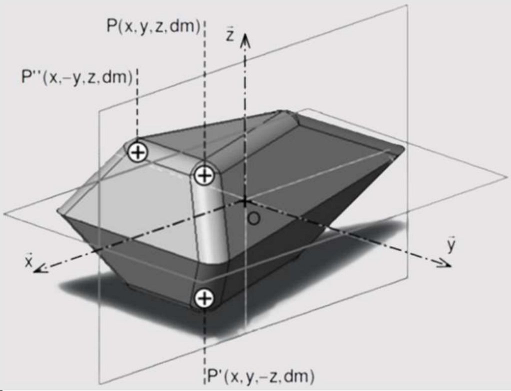

car tout point $P$ a un symétrique $P'$ pour compenser.

### 2.5.2. Symétrie par rapport à deux plans perpendiculaires (et forme de révolution)

Si $S$ possède au moins deux plans de symétrie $(O,\vec{x},\vec{y})$ et $(O,\vec{x},\vec{z})$ (ce qui est le cas des solides de révolution), alors sa matrice d'inertie exprimée en un point $O$ appartenant à l'intersection des deux plans de symétrie se met sous la forme :

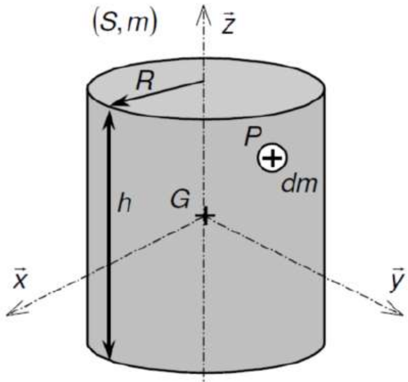
$$[I]_{O,S} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$D = E = F = 0$$




## 3. Exemple de calcul d'une matrice d'inertie

Calculons la matrice d'inertie d'un cylindre en son centre de gravité $G$.




Le cylindre $S$ est plein et homogène de hauteur $h$, de rayon $R$, de masse $m$, dans une base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ telle que $(G,\vec{z})$ est l'axe du cylindre.

Forme de révolution $\Rightarrow D = E = F = 0$

De plus comme les axes $(G,\vec{x})$ et $(G,\vec{y})$ ont des rôles équivalents, on en déduit $A = B$

$$\Rightarrow [I]_{G,S} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$$A = \int_V (y^2 + z^2).dm \qquad B = \int_V (x^2 + z^2).dm \qquad C = \int_V (x^2 + y^2).dm$$

**Calcul de $C$ :**

$$C = \int_V (x^2 + y^2).dm = \int_V r^2(sin^2\theta + cos^2\theta).\rho.r.dr.d\theta.dz = \rho.\int_0^R r^3.dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz = \frac{\rho.\pi.R^4.h}{2}$$

or $m = \rho.\pi.R^2.h$

$$\Rightarrow \boxed{C = \frac{m.R^2}{2}}$$

**Calcul de $A$ :** On remarque qu'on peut lier l'intégrale à celle utilisée pour calculer $C$.

$$2A = A + B = \int_V (x^2 + y^2 + 2z^2).dm = C + \int_V (2z^2).dm$$

$$\int_V (2z^2).dm = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} 2z^2.\rho.\pi.R^2.dz = \frac{2}{3}.\rho.\pi.R^2\left(\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \left(-\frac{h}{2}\right)^3\right) = \frac{m.h^2}{6} \Rightarrow \boxed{A = \frac{m.R^2}{4} + \frac{m.h^2}{12}}$$

$$\Rightarrow \boxed{[I]_{G,S} = \begin{bmatrix} \frac{m.R^2}{4} + \frac{m.h^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m.R^2}{4} + \frac{m.h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m.R^2}{2} \end{bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

## 4. Théorème de Huygens

Il sera parfois nécessaire d’exprimer la matrice d’inertie en un point qui n’est pas son centre d’inertie. Pour cela, il faut utiliser le théorème de Huygens.

**Théorème de Huygens**

Pour un point $P$ quelconque :

$$[I]_{P,S} = [I]_{G,S} + m\overrightarrow{PG} \wedge \left(\vec{u} \wedge \overrightarrow{PG}\right)$$

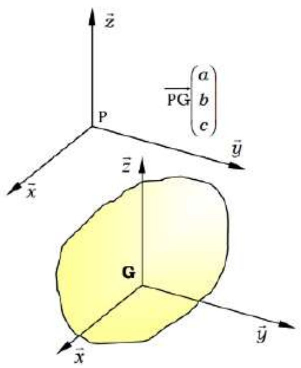
Ce qui est équivalent à :

$$[I]_{P,S} = \begin{bmatrix} A_P & -F_P & -E_P \\ -F_P & B_P & -D_P \\ -E_P & -D_P & C_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{bmatrix} + m.\begin{bmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G.y_G & -x_G.z_G \\ -x_G.y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G.z_G \\ -x_G.z_G & -y_G.z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{bmatrix}$$

avec $\overrightarrow{PG} = x_G\vec{x} + y_G\vec{y} + z_G\vec{z}$.

Toutes ces matrices d'inertie sont bien sûr exprimées dans la même base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Remarques :



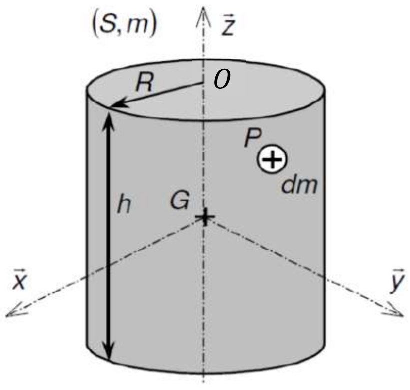

- Le théorème de Huygens revient à dire que la matrice d’inertie d'un solide $S$ en un point $P$ est la somme de :
  - la matrice d’inertie de $S$ en $G$ (centre d'inertie du solide) ;
  - la matrice d’inertie en $P$ d'un solide dont la masse serait concentrée en $G$.
- Il est souvent beaucoup plus aisé de calculer la matrice d’inertie au centre d’inertie (symétries) puis d’utiliser le théorème de Huygens pour le déplacer au point quelconque souhaité.
- En particulier pour un moment d’inertie :

$$I_{P,S/\Delta} = I_{G,S/\Delta} + m.d^2$$

Avec $d$ la distance entre les points $P$ et $G$.

### 4.1. Utilisation du théorème de Huygens pour trouver la matrice d'inertie d'un cylindre en son extrémité O :

À partir des résultats obtenus précédemment, déterminons la matrice d'inertie du cylindre au point O.




On a $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{h}{2} \end{pmatrix}$

D'après le théorème de Huygens :

$$[I]_{O,S} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} + m.\begin{bmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G.y_G & -x_G.z_G \\ -x_G.y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G.z_G \\ -x_G.z_G & -y_G.z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{bmatrix}$$

$$[I]_{O,S} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} + m.\begin{bmatrix} \left(\frac{h}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{h}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[I]_{O,S} = \begin{bmatrix} A + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & A + m\left(\frac{h}{2}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$