MP2 DS 3 PHYSIQUE

La durée est de 2 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Problème 1

Données numériques :	
Constante de gravitation universelle	$G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$
Permittivité électrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F \cdot m^{-1}}$
Masse de la Terre	$M_T = 5,98 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$
Rayon de la Terre	$R_T = 6,38 \cdot 10^3\ \mathrm{km}$ (quand on supposera la Terre sphérique)

1. Exprimer la force électrostatique $\vec{F}^{e}_{1/2}$ exercée par une charge ponctuelle q_1 sur une charge ponctuelle q_2.
Faire un schéma précisant clairement les notations utilisées.
En déduire le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q.

2. Énoncer le théorème de Gauss de l'électrostatique.

3. Exprimer la force gravitationnelle $\vec{F}^{g}_{1/2}$ exercée par une masse ponctuelle m_1 sur une masse ponctuelle m_2.
En déduire le champ gravitationnel $\vec{G}$ créé par une masse ponctuelle m.

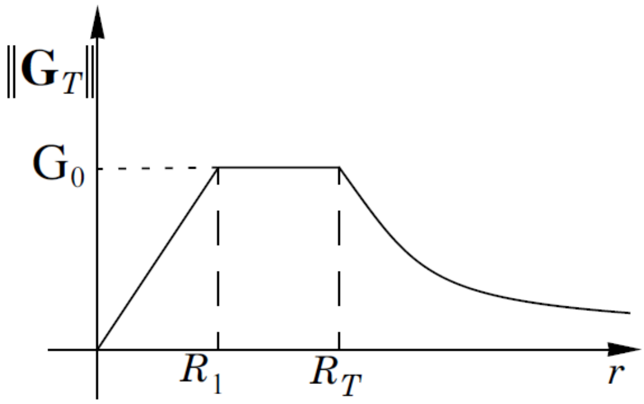
4. Dresser un tableau présentant les analogies entre les grandeurs électrostatiques et les grandeurs gravitationnelles. En déduire le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel créé par une distribution de masses quelconques.

Application : dans un premier temps, on assimile la Terre à une sphère de centre O, de rayon R_T et de masse M_T uniformément répartie dans tout le volume.

5. Déterminer le champ gravitationnel terrestre $\vec{G}_T$ en tout point de l'espace en fonction de R_T, M_T et r.
Représenter $\left\|\vec{G}_T\right\|$ graphiquement en fonction de r = OM.

6. Calculer $G_0 = \left\|\vec{G}_T\right\|$ à la surface de la Terre. Application numérique.

En réalité la masse n'est pas uniformément répartie. Dans un modèle plus élaboré dans lequel on suppose la symétrie sphérique conservée, les variations de sont représentées sur la figure ci-dessous avec $R_1 = 3,50.10^3$ km.



7. Justifier que le champ gravitationnel à la surface de la Terre n'est pas modifié.

8. Justifier que dans ce modèle, on considère le noyau terrestre ($0 < r < R_1$) comme homogène.
Calculer sa masse volumique moyenne.

9. Déterminer la masse $M_{manteau}(r)$ contenue dans le manteau terrestre ($R_1 < r < R_T$) en fonction de G_0, G, R_1 et r.
En reliant $\rho_{manteau}(r)$, la masse volumique du manteau, à la masse $dM_{manteau}$ comprise entre les sphères de rayons r et r + dr, $R_1 < r < R_T$, déterminer si $\rho_{manteau}$ est une fonction croissante ou décroissante de r.

Problème 2

La mesure de l'intensité d'un courant électrique peut nécessiter des méthodes très éloignées de celle utilisée dans un multimètre d'usage courant. Ce sujet envisage une méthode particulièrement adaptée à la mesure de courants d'intensité élevée. Dans ce problème, les courants mesurés ont des intensités de l'ordre du kA.
Les valeurs numériques demandées seront exprimées avec deux chiffres significatifs.

Données numériques :

- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m
- Constante d'Avogadro : $N_A = 6{,}0.10^{23}$ mol^{-1}
- Charge de l'électron : $-e = -1{,}6.10^{-19}$ C
- Masse de l'électron : $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg.

Pince ampèremétrique.

L'ouverture de la pince ampèremétrique permet d'insérer dans sa boucle le fil parcouru par le courant dont l'intensité est à mesurer. Lorsque la pince est fermée, ses deux mâchoires constituent une bobine. Le phénomène d'induction magnétique permet d'obtenir aux bornes de cette bobine une tension directement liée à l'intensité à mesurer.

A. Principe

Le courant dont l'intensité variable $i_1(t)$ est à mesurer parcourt un fil rectiligne (1), confondu avec l'axe Oz, dont les bornes A_1 et A_2 sont supposées, dans un premier temps, infiniment éloignées l'une de l'autre. Il s'agit de déterminer le champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le fil (1) en tout point M de l'espace en dehors du fil.

On admettra que l'on peut calculer le champ $\vec{B}_1$ comme si le courant $i_1(t)$ était constant.

Le point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z) comme indiqué **Figure 1**.

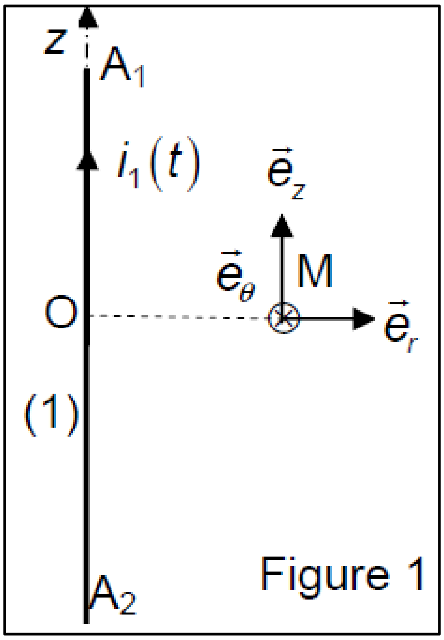


Figure 1

1. Par des arguments précis de symétries et d'invariances, indiquer la direction du champ magnétique $\vec{B}_1$ créé en M.
2. Des lignes de champ magnétique sont représentées **Figure 1 bis (en annexe)**. Montrer la cohérence avec la question précédente.
3. En choisissant avec précision un contour d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique créé par ce fil « infini » parcouru par le courant i_1. Représenter sur la **feuille réponse**, à l'échelle, le champ magnétique en M sur la **Figure 1 bis.** Quel est le signe du courant dans le fil vertical ?

La pince ampèremétrique est modélisée par une bobine (2) constituée d'un fil enroulé sur un tore d'axe Oz, de rayon moyen $r_0 = 2{,}5$ cm et de section carrée de côté a = 1 cm. Le tore est supposé être constitué d'un matériau non magnétique, i.e. dont les propriétés magnétiques sont celles du vide. L'enroulement comporte $N = 1{,}0.10^3$ spires jointives et régulièrement réparties, cf. **Figures 2 et 3**. Ses extrémités sont dans un premier temps reliées à un oscilloscope.

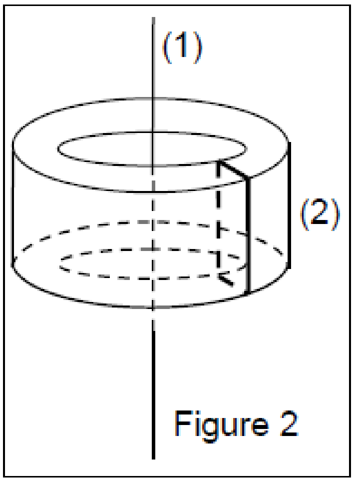


Figure 2

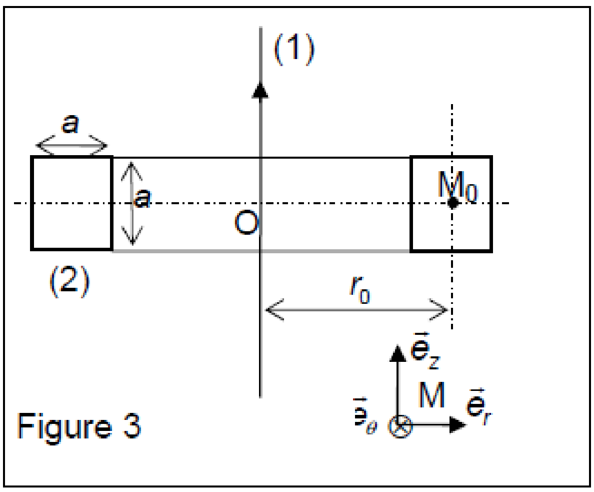


Figure 3

4. Définir puis exprimer le flux φ du champ $\vec{B}_1(M,t)$ à travers une spire de la bobine (2) orientée par sa normale $\vec{e}_\theta$.
En déduire le flux ϕ au travers de l'ensemble de la bobine (2).

5. Exprimer le flux φ_{21} du champ moyen $\vec{B}_1(M_0,t) = \vec{B}_1(r_0,\theta,0,t)$ à travers une spire de la bobine, en supposant le champ magnétique uniforme sur la surface de la spire et égal à sa valeur en M_0.
Donner la nouvelle expression du flux ϕ_{21} du champ magnétique créé par le fil (1) à travers la bobine (2).

6. Calculer littéralement puis numériquement l'erreur relative $\dfrac{\phi_{21}-\phi}{\phi_{21}}$ commise en remplaçant ϕ par ϕ_{21} ?

Pour la suite du problème, seule l'expression approchée ϕ_{21} du flux sera utilisée.

Remarque : à partir de la question 7, des notions sur l'induction sont utilisées.

7. Donner alors l'expression de $u_2(t)$, valeur absolue de la tension obtenue aux bornes de la bobine (2).
Quelle est sa valeur lorsque l'intensité du courant $i_1(t)$ dans le fil (1) est constante ? Commenter.

B. Mesures

Le courant dans le fil (1) est sinusoïdal d'intensité $i_1(t) = I_{1m}.\cos(\omega t)$. La bobine (2) étant reliée à un oscilloscope. L'oscillogramme est représenté **Figure 4** avec les échelles suivantes : 1 carreau pour 5 ms et 1 carreau pour 500 mV.

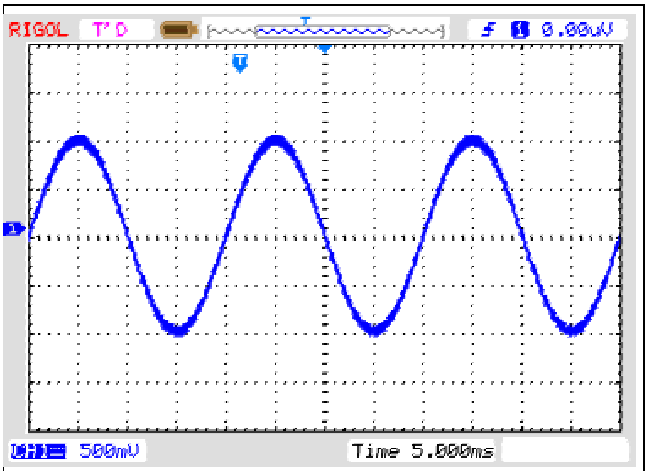


Figure 4

8. Établir l'expression de la tension $u_2(t)$ à l'aide des paramètres μ_0, N, a, r_0, ω et I_{1m}.

9. Quelle est la valeur numérique de la fréquence f du courant $i_1(t)$?

10. Quelle est la valeur numérique de l'intensité efficace I_1 du courant $i_1(t)$?

C. Influence de la position du fil

11. Donner la définition d'un coefficient d'induction mutuelle entre deux circuits.
De quoi dépendent sa valeur et son signe ?
Donner, à partir de ϕ_{21}, l'expression du coefficient d'induction mutuelle M_{21} entre les circuits (1) et (2).

12. La bobine (2) est maintenant parcourue par un courant d'intensité $i_2(t)$ dont l'orientation est précisée **Figure 5**.
Déterminer soigneusement la direction du champ magnétique $\vec{B}_2(M,t)$ qu'elle crée en tout point M repéré par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z).

13. L'expression du module de ce champ en tout point de l'espace situé à l'intérieur du tore est $B_2(r,\theta,z,t) = \dfrac{\mu_0 N i_2(t)}{2\pi r}$ et ce champ magnétique est nul à l'extérieur du tore. Pour la suite, comme en **5.**, le champ magnétique $\vec{B}_2(M,t)$ est supposé uniforme sur la surface d'une spire et égal à sa valeur en M_0. Les bornes A_1 et A_2 du fil (1) sont maintenant reliées entre elles pour former un circuit fermé ; ce circuit est supposé plan, contenu dans un plan méridien du tore. Donner, par un calcul d'intégrale, l'expression du flux ϕ_{12} du champ $\vec{B}_2(M_0,t)$ créé par la bobine (2) à travers le circuit (1) ainsi réalisé. En déduire l'expression du coefficient d'induction mutuelle M_{12} défini à partir de ϕ_{12} et commenter.