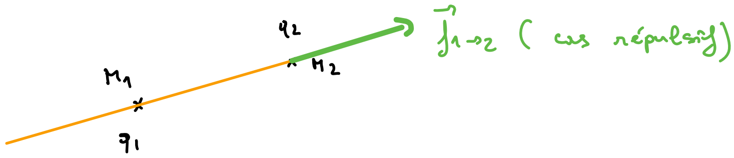
DS 3 - Problème 1

1.

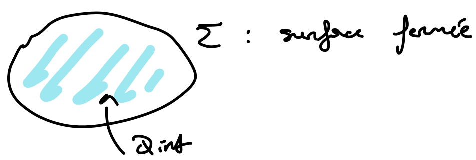


$$\vec{f}_{1\to2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^{\,3}} \quad \text{et} \quad \vec{f}_{1\to2} = q_2\vec{E_1}(M_2) \Rightarrow \vec{E_1}(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^{\,3}}$$

d'une manière g^{le}, une charge q en P crée en un point M le champ :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}}$$

2. $$\boxed{\Phi(\vec{E}/\Sigma) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}}$$



3. Analogue à Q2A : $\vec{f}_{1\to2} = -G m_1 m_2 \dfrac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^{\,3}}$

masse m en P crée en M : $\vec{g}(M) = -Gm\dfrac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

4.

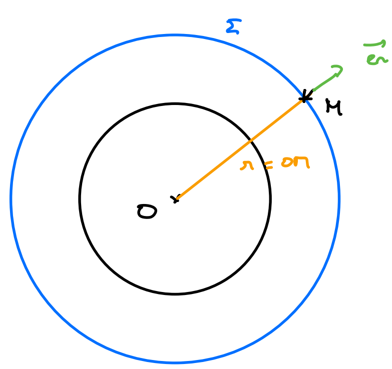
électrostatique	gravitation
$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-G$
q	m
$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$	$-Gm\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$

th. de gauss pour la gravitation :

$$\boxed{\Phi(\vec{g}/\Sigma) = -4\pi G M_{int}}$$

5. La symétrie sphérique donne $\vec{g}(M) = g_r(r)\,\vec{e_r}$

le th de Gauss avec une surface sphérique de rayon r donne : $\Phi(\vec{g}/\Sigma) = -4\pi G M_{int}$

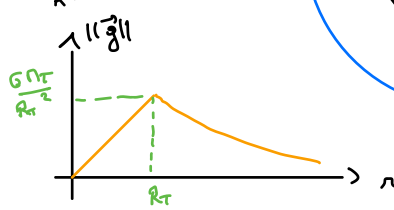


Or, $\Phi(\vec{g}/\Sigma) = 4\pi r^2 g_r(r)$

Et $M_{int} = M_T$ si $r \geq R_T$ / $M_{int} = \dfrac{r^3}{R^3} R_T$ si $r \leq R$

D'où :

$$\begin{cases} \vec{g}(M) = -\dfrac{GM_T}{R_T^3}\, r\,\vec{e_r} & \text{si } r \leq R_T \\ \vec{g}(M) = -GM_T \cdot \dfrac{1}{r^2}\,\vec{e_r} & \text{si } r \geq R_T \end{cases}$$



6. $g_0 = \|\vec{g}(R_T)\| = \frac{G M_T}{R_T^2}$ A.N : $g_0 = 9,8\ m.s^{-2}$

7. Dès lors que la symétrie sphérique est conservée, pour $r \geq R_T$, seule la masse totale compte, pas la manière dont elle est répartie radialement, puisque on peut toujours écrire $\underbrace{4\pi r^2 g_r(r)}_{\text{ceci suppose la symétrie sphérique}} = -4\pi G M_{int}$
$= -4\pi G M_T$ si $r \geq R$

8. Pour $r \leq R_1$, on retrouve une variation de g_r linéaire en r, ce qui est caractéristique d'une distribution homogène.

On aura $g_0 = \frac{G M_1}{R_1^2} \Rightarrow M_1 = \frac{g_0 R_1^2}{G}$ (M_1 = masse du noyau)

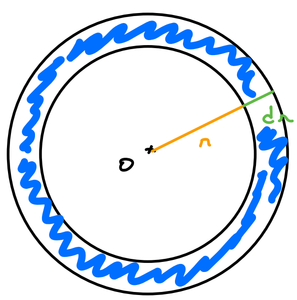
Et $\mu_1 = \frac{M_1}{V_1} = \frac{\frac{g_0 R_1^2}{G}}{4/3\, \pi R_1^3} = \frac{3 g_0}{4 \pi G R_1}$ A.N : $\mu_1 \simeq 10^4\ kg.m^{-3}$

9. On utilise le th de Gauss : $4\pi r^2 g_r(r) = -4\pi G M_{int}$

Pour $R_1 \leq r \leq R_T$, $g_r(r) = g_0$. Donc $\underbrace{M_{int}(r)}_{= M_{manteau}(r)} = \frac{g_0 r^2}{G}$

On considère une "coquille sphérique" comprise entre les sphères de rayon r et $r + dr$. Son volume est $4\pi r^2 dr$, et donc la masse contenue à l'intérieur vaut $dM_{manteau} = 4\pi r^2 dr \cdot \mu(r)$

(on note $\mu(r)$ la masse volumique à la distance r du centre)



Par ailleurs, $dM_{manteau} = M_{int}(r + dr) - M_{int}(r)$

D'où $\mu(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{M_{int}(r+dr) - M_{int}(r)}{dr}$

Et pour $dr \to 0$, $\frac{M_{int}(r+dr) - M_{int}(r)}{dr} = \frac{dM_{int}}{dr}(r)$

D'où $\mu(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dM_{int}}{dr}(r)$. Comme $M_{int}(r) = \frac{g_0 r^2}{G}$, $\frac{dM_{int}}{dr}(r) = \frac{2 g_0 r}{G}$

et donc $\mu(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \cdot \frac{2 g_0 r}{G}$, soit $\boxed{\mu(r) = \frac{g_0}{2\pi G r}}$ donc μ décroît avec r.