Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 8 : 12 au 15 novembre 2024

Questions de cours

- ☐ Comme d'habitude, savoir citer toute définition, toute proposition du cours.
- ☐ Montrer que les deux applications de E dans $\mathbb{R}$ suivantes sont lipschitziennes :
  - $x \mapsto \|x\|$
  - $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$, où on a fixé une partie non vide A de E.
- ☐ On munit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$ de la norme $\|\cdot\|_1$. On définit l'endomorphisme φ de E qui à f associe la primitive de f qui s'annule en 0. Montrer que φ est continue et déterminer sa norme subordonnée. *On pourra considérer la suite (f_n) définie par : $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = (1-x)^n$.*
- ☐ On identifie $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à $\mathbb{K}^n$ et on munit cet ensemble de la norme $\|\cdot\|_1$. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\|A\|_{\mathrm{op},1} = \sup\limits_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}} \dfrac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}$. Calculer $\|A\|_{\mathrm{op},1}$.
- ☐ Si $f : E \to F$ est continue et si A est un compact de E, alors $f(A)$ est un compact de F.
- ☐ Si $f : E \to F$ est continue et si A est une partie connexe par arcs de E, alors $f(A)$ est une partie connexe par arcs de F.
- ☐ Soient A un compact de E et $f : A \to F$ une application continue. Alors f est uniformément continue. *On pourra raisonner par l'absurde.*
- ☐ Soit $f : \mathbb{R} \to F$ une fonction T-périodique et continue. Montrer que f est uniformément continue.

Chapitre 8 : Topologie d'un espace vectoriel normé

II Limites et continuité de fonctions

II.1 Limites de fonctions

voir programme précédent.

II.2 Continuité en un point

voir programme précédent.

II.3 Applications continues

voir programme précédent.

II.4 Continuité uniforme et fonctions lipschitziennes

- continuité uniforme. Toute fonction uniformément continue est continue.
- fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, donc continue. L'application norme est 1-lipschitzienne.
- distance à une partie $\mathrm{d}(x, A)$. L'application $x \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

II.5 Continuité des applications linéaires et multilinéaires

- continuité d'une application linéaire. Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$.
- norme subordonnée (ou norme d'opérateur), notée $\|u\|_{\text{op}}$ ou $|||u|||$. C'est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.
- définition d'une norme sous-multiplicative. La norme d'opérateur est sous-multiplicative.
- continuité d'une application p-linéaire.

II.6 Normes subordonnées de matrices

- exemple de la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{K}^n$.

III Compacité

III.1 Définitions et propriétés

- définition d'une partie compacte A de E : toute suite d'éléments de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A.
- dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, toute partie fermée et bornée est un compact.
- dans un espace vectoriel normé, tout compact est fermé et borné.
- si K est un compact et F un fermé de E, alors $F \cap K$ est un compact. Si F est un fermé de E inclus dans un compact, alors F est un compact.
- un produit d'une famille finie de compacts est un compact.
- si K est un compact et si (u_n) est une suite d'éléments de K, alors (u_n) est convergente si et seulement si (u_n) admet une unique valeur d'adhérence.

III.2 Compacité et applications continues

- l'image d'un compact par une application continue est un compact.
- théorème des bornes atteintes : si $f : K \to \mathbb{R}$ est continue et si K est compact, alors f est bornée et atteint ses bornes.
- théorème de Heine : toute application continue sur un compact est uniformément continue.

IV Connexité par arcs

IV.1 Définitions et propriétés

- un chemin (ou arc) joignant x à y dans A est une application continue $\gamma : [0, 1] \to A$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. C'est une relation d'équivalence sur A.
- les classes d'équivalence sont appelées les composantes connexes par arcs de A. A est connexe par arcs si A possède une unique composante connexe par arcs.
- une partie convexe est connexe par arcs.
- définition d'une partie étoilée. Une partie étoilée est connexe par arcs.
- dans $\mathbb{R}$, les parties connexes par arcs sont les intervalles.

IV.2 Connexité par arcs et applications continues

- l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs. Cela généralise le théorème des valeurs intermédiaires.

Chapitre 9 : Topologie en dimension finie

I Équivalence de normes

- Théorème : en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
- cela entraîne qu'en dimension finie, les notions suivantes ne dépendent pas de la norme choisie : les ouverts, les fermés, les parties bornées, l'intérieur, l'adhérence, la frontière d'une partie, les suites convergentes (et leurs limites), les suites bornées, les fonctions continues, les fonctions bornées, les parties compactes, les parties connexes par arcs.
- si E est de dimension finie et si $\mathcal{B}$ est une base de E, la convergence d'une suite à valeurs dans E est équivalente à la convergence de chacune de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. L'existence d'une limite d'une fonction à valeurs dans E est équivalente à l'existence d'une limite de chacune de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Hors programme cette semaine :

II Compacts en dimension finie

- si E est de dimension finie et si K est une partie de E, alors K est un compact si et seulement si K est fermé et borné.
- théorème de Bolzano-Weierstrass : dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence.
- dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une suite bornée converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence.
- si E est un espace vectoriel normé et si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors F est un fermé de E.

III Continuité des applications linéaires, multilinéaires, polynomiales

- si E est de dimension finie, toute application linéaire $f : E \to F$ est continue.
- définition d'une application polynomiale. Toute application polynomiale définie sur un espace vectoriel de dimension finie est continue.
- toute application p-linéaire définie sur un produit d'espaces vectoriels de dimension finie est continue.
- exemples du déterminant, de $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AB$, de $(u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \mapsto v \circ u$.