

La durée est de 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Problème 1 Composition chimique du gong



Le gong de Fort Boyard permet de matérialiser le temps de l'aventure. Le gong désigne une variété d'instruments de musique de percussion en métal, originaires de l'Asie du Sud-Est. Sa sonorité est, entre autres, liée au matériau utilisé pour sa fabrication : le bronze, alliage de cuivre Cu et d'étain Sn. Cette sonorité dépend du pourcentage d'étain constituant le bronze. Le cuivre pur cristallise dans le système cubique à faces centrées.

1. Représenter la maille conventionnelle, puis déterminer le nombre d'atomes de cuivre par maille. En adoptant le modèle des sphères dures indéformables, expliciter la relation entre le paramètre de maille a et le rayon métallique R_{Cu} .
2. Exprimer la masse volumique du cuivre ρ en fonction des données (à la fin du problème), puis calculer sa valeur.
3. Repérer, puis dénombrer les sites octaédriques dans cette structure. Évaluer numériquement le rayon maximal R_o d'un atome étranger pouvant occuper un tel site.

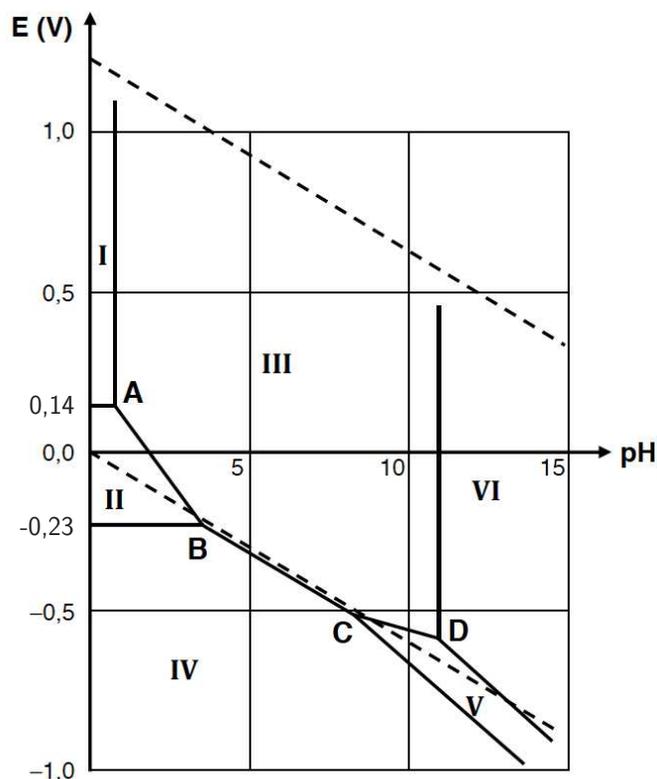
On propose un protocole expérimental permettant de mesurer le pourcentage massique d'étain du bronze constituant le gong. On plonge un échantillon du gong de masse $m = 3,00$ g dans une solution aqueuse d'acide chlorhydrique ($\text{H}_{(\text{aq})}^+$, $\text{Cl}_{(\text{aq})}^-$), de volume $V = 0,5$ L et de concentration molaire $C = 0,1$ mol \cdot L $^{-1}$. Un gaz se dégage ; son volume est mesuré grâce à un tube à dégagement introduit dans une éprouvette graduée remplie d'eau.

La figure en page suivante représente le diagramme E -pH de l'étain, tracé à 25 °C pour une concentration totale en espèces dissoutes $c_T = 10^{-3}$ mol \cdot L $^{-1}$. Il fait intervenir les espèces $\text{SnO}_{2(\text{s})}$, $\text{Sn}_{(\text{s})}$, $\text{Sn}_{(\text{aq})}^{2+}$, $\text{Sn}_{(\text{aq})}^{4+}$, $\text{SnO}_{3(\text{aq})}^{2-}$ et $\text{HSnO}_{2(\text{aq})}^-$.

4. Calculer le nombre d'oxydation de l'élément Sn dans les différentes espèces, puis attribuer à chacune d'elles son domaine d'existence ou de prédominance indiqué en chiffres romains dans le diagramme E -pH.
5. En utilisant le diagramme et la valeur de c_T , estimer la valeur du potentiel standard du couple $\text{Sn}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Sn}_{(\text{s})}$. Comparer à la valeur donnée en fin de problème.

On superpose au diagramme E -pH de l'étain celui de l'eau, en traits pointillés, tracé à 25 °C pour une pression totale en espèces gazeuses $P_T = 1$ bar.

6. Que peut-on dire des domaines de stabilité de $\text{Sn}_{(\text{s})}$ et $\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}$? En déduire l'équation de la réaction qui va se produire si on introduit un morceau d'étain $\text{Sn}_{(\text{s})}$ dans une solution aqueuse très acide et identifier le gaz qui s'en échappe.



Par un raisonnement équivalent, on admet que l'introduction d'un morceau de cuivre $\text{Cu}_{(s)}$ dans une solution aqueuse très acide ne provoque aucune transformation chimique : le cuivre solide est stable dans l'eau en milieu acide.

7. Exprimer le volume molaire V_m d'un gaz supposé parfait en fonction de sa température T et de sa pression P . Calculer numériquement V_m à $T = 293 \text{ K}$ et $P = 1,013 \text{ bar}$.

8. En appliquant le protocole proposé, on mesure en fin d'expérience un volume de gaz dégagé $V_f = 153 \text{ mL}$. En détaillant votre raisonnement, déterminer la masse d'étain m_{Sn} dans l'échantillon de bronze étudié, puis son pourcentage massique d'étain w_{Sn} .

Données :

Nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

Propriétés atomiques :

Élément	Cu	Sn
Rayon métallique (pm)	128	151
Masse molaire ($\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)	63,5	118,7

Potentiels standard :

	$\text{Sn}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Sn}_{(s)}$	$\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}$	$\text{H}_{(\text{aq})}^+/\text{H}_{2(\text{g})}$
$E^\circ (\text{V})$	-0,137	1,23	0

Problème 2 : Genèse d'un coup de foudre

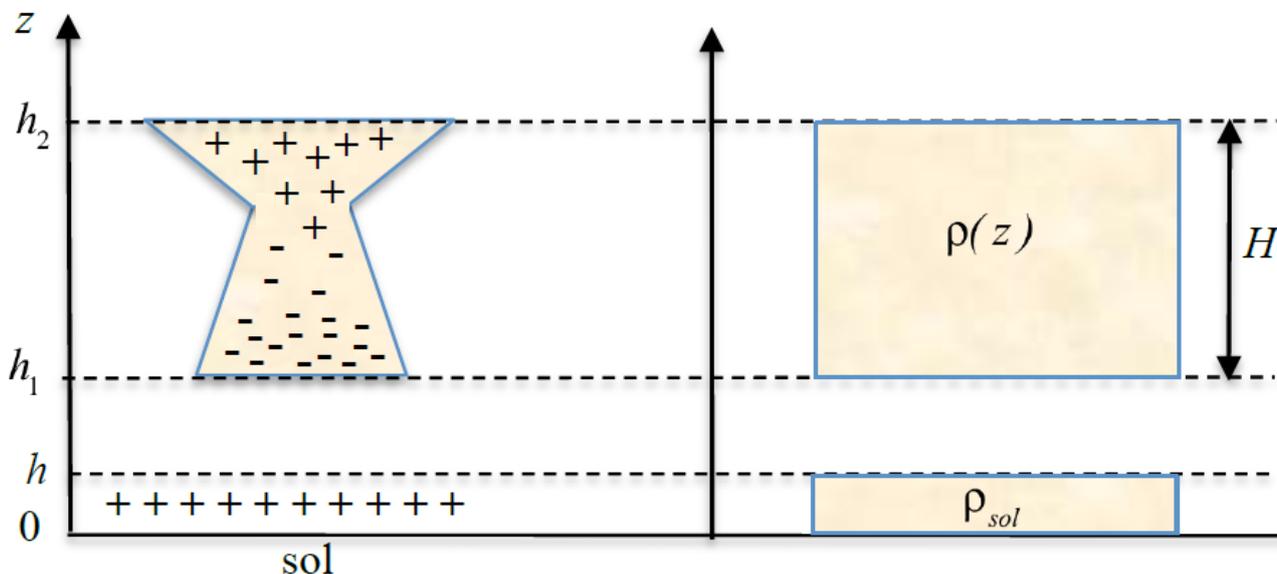


Le processus de formation des nuages dans l'atmosphère suit un ensemble complexe d'étapes dont la connaissance est à la base de la météorologie. Le cumulonimbus est le stade ultime du nuage formé dans un courant d'air chaud ascendant en contact avec un air froid et sec. Son profil en forme d'enclume, dont le sommet atteint le haut de la troposphère, et sa taille colossale sont caractéristiques et annonciateurs d'un orage imminent.

On se propose de modéliser la répartition des charges électriques dans le nuage et de comprendre l'apparition de la foudre. Les mécanismes de séparation des charges électriques au sein du nuage ne sont pas encore parfaitement compris, mais on constate habituellement l'apparition de charges négatives à la base du nuage et de charges positives au sommet. Dans certains cas, il peut même exister plusieurs zones chargées alternativement négativement et positivement. La base chargée du nuage fait alors apparaître, par influence et ionisation de l'air, des charges positives dans l'atmosphère sur une hauteur $h = 500$ m au voisinage du sol. Des mesures effectuées par ballon sonde permettent de déterminer la valeur de la composante verticale du champ électrique dans l'atmosphère : environ 65 kV.m^{-1} à 500 m d'altitude et jusqu'à la valeur maximale en valeur absolue à l'intérieur du nuage $E_{\text{max}} = 0,20 \text{ MV.m}^{-1}$.

On considère un nuage typique situé entre les altitudes $h_1 = 2,0$ km et $h_2 = 10$ km, hauteur de la troposphère, de hauteur $H = h_2 - h_1$ et de section horizontale $S = 1,0 \text{ km}^2$. On rappelle la permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

Dans la modélisation proposée, on néglige tout effet de bord et on suppose donc que les grandeurs étudiées ne dépendent que de l'altitude z , comme indique sur le schéma ci-après.



Les

charges positives près du sol sont réparties avec la densité volumique de charges uniforme ρ_{sol} . Le champ électrique est supposé nul en $z = 0$. À l'intérieur du nuage, on considère simplement que la densité volumique de charges $\rho(z)$ varie linéairement de la valeur maximale $\rho_0 > 0$ en $z = h_2$ à la valeur opposée $-\rho_0$ en $z = h_1$.

1. Montrer qu'en tout point M de l'espace, le champ électrique peut se mettre sous la forme : $\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z$.

2. Déterminer le champ électrique $E(z)$ dans la zone chargée $0 \leq z \leq h$ au niveau du sol.

En déduire la valeur numérique de la densité volumique de charges ρ_{sol} , ainsi que la charge totale Q_{sol} existant dans cette zone.

3. Montrer que le champ électrique dans la zone $h \leq z \leq h_1$ est uniforme et donner sa valeur.

4. Établir l'expression de la densité volumique de charges $\rho(z)$ à l'intérieur du nuage.

5. Montrer que le champ électrique dans le nuage s'écrit : $E(z) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0 H} (z^2 - (h_1 + h_2)z) + \frac{1}{\epsilon_0} \left(\rho_{\text{sol}} h + \rho_0 \frac{h_1 h_2}{H} \right)$.

6. Exprimer la valeur numérique de ρ_0 , ainsi que les charges totales $-Q$ et $+Q$ portées respectivement par les moitiés inférieure et supérieure du nuage. On pourra introduire $h_{\text{moy}} = \frac{h_1 + h_2}{2}$. Commenter.

7. Exprimer le potentiel électrostatique $V(z)$ dans le domaine sous le nuage, et dans le nuage. On prendra $V(z = 0) = 0$.
En déduire la différence de potentiel U entre le sol et la base du nuage.
Commenter, en comparant par exemple à des tensions industrielles.

La foudre est une décharge électrique entre le nuage et le sol (parfois même entre deux nuages) permettant de neutraliser les charges accumulées. Lorsque le champ électrique atteint localement la valeur $E_{\text{dis}} = 10 \text{ kV.cm}^{-1}$ appelé champ disruptif, l'air est ionisé et un courant électrique devient possible dans l'air devenu conducteur : la décharge est à craindre.

8. On rappelle la valeur du champ disruptif de l'air : $E_{\text{dis}} = 10 \text{ kV.cm}^{-1}$. La comparer à la valeur du champ électrique obtenu précédemment. Commenter.

On constate que la foudre tombe préférentiellement sur des objets pointus, comme les arbres, les clochers, et les paratonnerres. Pour illustrer cet effet de pointe, on propose la modélisation suivante. Un objet pointu situé à l'altitude z est modélisé par une petite sphère de rayon R , de charge q , et porté au potentiel $V(z)$ supposé uniforme dans la sphère. On ne considère ici que l'action de la sphère sur son environnement immédiat. Soit un point M situé à la distance $r > R$ du centre O de la sphère.

9. Rappeler l'expression du champ électrique \vec{E} et du potentiel électrostatique créés en M par la sphère chargée.
En déduire la relation entre la norme E du champ électrique créé au voisinage immédiat de la sphère et le potentiel $V(z)$ de celle-ci.

10. Déterminer le rayon de la sphère permettant l'ionisation de l'air à sa surface.
Faire l'application numérique pour $z = 2,0 \text{ m}$ et $z = 10 \text{ m}$. Commenter. Quel est le principe d'un paratonnerre ?

11. Pourquoi dit-on qu'en l'absence d'obstacles, il vaut mieux s'allonger par terre et attendre que l'orage passe plutôt que de rester debout ? À quelle altitude l'air pourrait-il être ionisé au bout des doigts ? Il apparaît alors un courant ionique et des effluves lumineux dus à la recombinaison des ions. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet corona.

Lorsque la foudre tombe, la décharge électrique ne dure que quelques centaines de microsecondes et libère une énorme quantité d'énergie dans l'atmosphère.

12. Évaluer l'intensité du courant électrique de la décharge.

13. Déduire des résultats précédents l'énergie libérée par la foudre.

14. Expliquer succinctement quelle peut être l'origine du tonnerre ?
Comment peut-on estimer la distance d'un orage grâce aux éclairs et le tonnerre ?

Problème 3 : Champs magnétiques

Dipôles magnétiques

1. Définir le vecteur moment magnétique $\vec{\mu}$ associé à une boucle circulaire de courant de rayon R parcourue par une intensité I . Faire un schéma.
2. Expliquer pourquoi une sphère chargée, en rotation autour d'un axe passant par son centre, est, elle aussi, caractérisée par un moment magnétique dont on précisera la direction et le sens (on ne demande pas le calcul du moment mais seulement la justification de son existence. Une réponse brève est attendue).
3. Dans le cas du proton (noyau d'hydrogène) qui tourne sur lui-même on peut lui associer un moment magnétique $\vec{\mu}_p$ qui a pour valeur $\mu_p = 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ J.T}^{-1}$. Justifier par analyse dimensionnelle cette unité.

Soit un dipôle magnétique de moment $\vec{\mu}$ placé dans un champ magnétique extérieur uniforme permanent $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. On rappelle les expressions de l'énergie potentielle $E_{\text{pot}} = \vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$; et du couple $\vec{\Gamma}(O) = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$.

4. En déduire quelles sont les 2 positions d'équilibre d'un moment dipolaire magnétique, dans un champ magnétique extérieur uniforme \vec{B}_0 , en précisant les valeurs associées de l'énergie potentielle.
5. Évaluer la différence d'énergie en eV entre les deux positions d'équilibre d'un proton soumis à un champ magnétique permanent de 1 tesla.

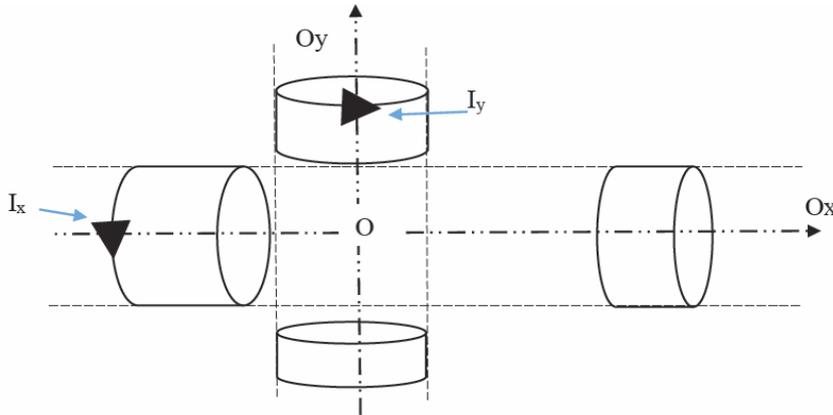
Création d'un champ B tournant

On fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'ARQS : on calcule le champ magnétique créé par des courants variables $i(t)$, comme en magnétostatique. En particulier, on peut utiliser le théorème d'Ampère. On considère un solénoïde de longueur L qui contient N spires, donc $n = N/L$ spires par unité de longueur parcourues par un

courant I . On se place dans l'approximation du solénoïde infini.

6. Faire un schéma en indiquant l'axe du solénoïde, le sens du courant et celui du champ magnétique. Etudier les symétries et invariances.
7. On admet que le champ sur l'axe vaut $B = \mu_0 n I$. En déduire le champ en tout point à l'intérieur du solénoïde, ainsi qu'en tout point à l'extérieur.

On considère un ensemble de deux solénoïdes infinis identiques d'axes Ox et Oy perpendiculaires concourants en O . Les spires sont considérées comme circulaires car réalisées sur un cylindre de rayon R comportant n spires jointives par unité de longueur. Les spires du solénoïde d'axe Oy sont parcourues par une intensité $I_y = I_0 \cos(\Omega t + \alpha)$ et celles du solénoïde d'axe Ox par une intensité $I_x = I_0 \cos(\Omega t)$. L'orientation des courants correspond au sens direct autour des axes respectifs.



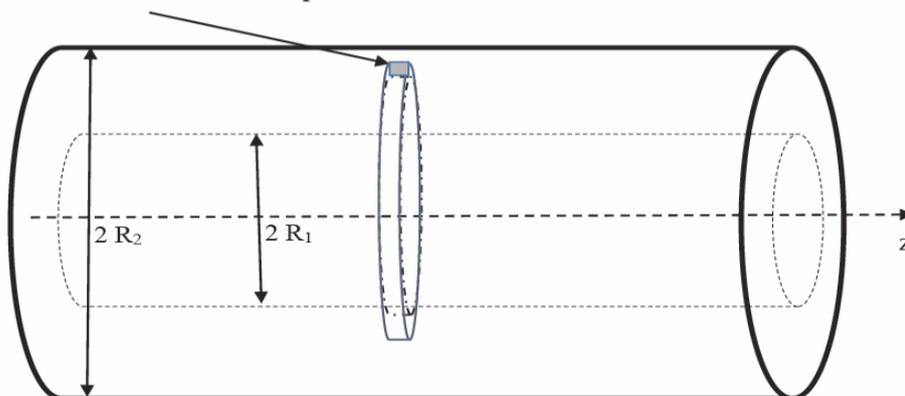
Les solénoïdes sont infiniment longs, seules quelques spires ont été représentées.

8. Établir que le champ magnétique dans la zone commune aux deux circuits, pour un déphasage $\alpha = \pi/2$, est un champ tournant $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}$, c'est-à-dire un champ de norme constante B_1 porté par une direction de vecteur unitaire \vec{u} qui tourne à vitesse uniforme dans le plan (xOy) . On précisera sa norme B_1 et sa vitesse de rotation ω .

Création d'un champ permanent intense B

On utilise un solénoïde « épais » (épaisseur $e = R_2 - R_1$) considéré comme la superposition de solénoïdes infinis (en réalité de longueur $L \gg R_2$) de même axe Oz . Il est réalisé par un empilement jointif de spires de section carrée, de côté $a = 1,0 \text{ mm}$, enroulées sur un cylindre de longueur $L = 4,0 \text{ m}$, depuis un rayon $R_1 = 20 \text{ cm}$ jusqu'à un rayon $R_2 = 25 \text{ cm}$. Les spires sont des fils de cuivre parcourus par un courant continu la uniformément réparti, orienté dans le sens direct autour de Oz .

I_0 uniformément réparti sur un carré de côté a .



9. Calculer le vecteur densité volumique de courant \vec{j} pour $R_2 > r > R_1$.
10. Établir que l'expression du champ sur l'axe vaut $B = \mu_0 I_0 (R_2 - R_1) / a^2$ (on admet que le champ est nul à l'extérieur du solénoïde)
11. Quelle est l'intensité nécessaire pour engendrer un champ de 1 Tesla ?