Problème 2

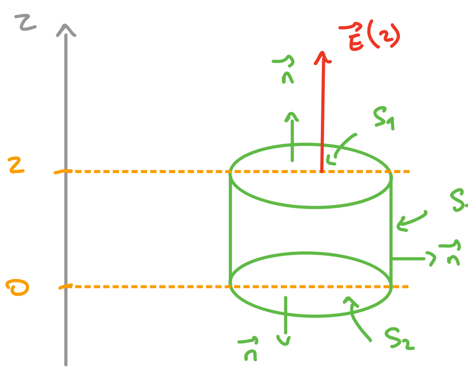
1. La charge volumique ne dépend que de z (donc pas de x et y) donc, d'après le principe de Curie (le champ $\vec{E}$ a au moins les symétries des charges :

- symétries : tout plan $\perp$ à (Oxy) est plan de symétrie $\Rightarrow$ $\vec{E}$ selon $\vec{e_z}$

- invariances : par translation $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ $\Rightarrow$ $\vec{E}$ ne dépend pas de x et y

On en conclut que $\vec{E}(M) = E_z(z)\,\vec{e_z}$

2.



On applique le th de gauss sur la surface fermée $\Sigma = S_1 + S_2 + S_l$. (S_1 et S_2 de surface S)

$$\phi(\vec{E}/\Sigma) = \phi(\vec{E}/S_1) + \phi(\vec{E}/S_2) + \phi(\vec{E}/S_l)$$

avec $\phi(\vec{E}/S_1) = \iint (E_z(z)\,\vec{e_z}) \cdot (dS\,\vec{e_z}) = E_z(z) \cdot S$

ensuite, $\phi(\vec{E}/S_2) = 0$ ($\vec{E}$ est nul en $z=0$)

enfin, $\phi(\vec{E}/S_l) = 0$ ($\vec{E} \perp \vec{n}$ partout)

$Q_{int} = \rho_{sol} \cdot S\,(h-z)$

Comme $\phi(\vec{E}(\Sigma)) = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (th de Gauss), on obtient :

$$E_z(z) \cdot \cancel{S} = \frac{\rho_{sol}\,\cancel{S}\,z}{\varepsilon_0}$$

et donc $\boxed{E_z(z) = \dfrac{\rho_{sol}\,z}{\varepsilon_0}}$

On connait $E_z(z=h)$, on en déduit ρ_{sol} par $\rho_{sol} = \dfrac{\varepsilon_0\,E_z(z=h)}{h}$ A.N : $\rho_{sol} = 1{,}2 \cdot 10^{-9}\ C \cdot m^{-3}$

Pour une surface S et une hauteur h, $Q_{sol} = \rho_{sol}\,S\,h$ A.N : $Q_{sol} = 0{,}58\ C$

3. On utilise $\mathrm{div}(\vec{E}) = \rho/\varepsilon_0$ (on pourrait aussi continuer avec le th de Gauss ...)

Comme $\vec{E} = E_z(z)\,\vec{e_z}$, $\mathrm{div}(\vec{E}) = \dfrac{\partial E_z}{\partial z}$

Pour $h < z < h_2$, $\rho = 0$ et donc $\dfrac{\partial E_z}{\partial z} = 0$ $\Rightarrow$ $E_z = c^{st}$.

Donc $\vec{E}$ uniforme (et il a la valeur en $z = h$) : $\boxed{\text{pour } h < z < h_1 \quad \vec{E} = E_z(h)\,\vec{e_z} \quad \text{avec } E_z(h) = 65\ kV \cdot m^{-1}}$

4. A l'intérieur du nuage $(h_1 < z < h_2)$, ρ varie linéairement avec $\rho(h_1) = -\rho_0$ et $\rho(h_2) = \rho_0$, d'où $\boxed{\rho(z) = -\rho_0 + \frac{2\rho_0}{h_2 - h_1}(z - h_1)}$ On note $h_2 - h_1 = H$

5. Comme précédement, $\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(z)}{\varepsilon_0}$ (là encore, on peut aussi le faire avec gauss) -

Donc $\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} + \frac{2\rho_0}{\varepsilon_0 H}(z - h_1)$

On intègre : $E_z = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{2h_1}{H}\right) z + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H} z^2 + c^{ste}$

on remarque que $1 + \frac{2h_1}{H} = \frac{H + 2h_1}{H} = \frac{h_1 + h_2}{H}$

Comme $E_z(h_1) = E_z(h) = \frac{\rho_{sol} h}{\varepsilon_0}$, $\frac{\rho_{sol} h}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{h_1 + h_2}{H} \cdot h_1 + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H} h_1^2 + c^{ste}$

d'où $c^{ste} = \frac{\rho_{sol} h}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H}\left(\underbrace{-h_1^2 + h_1(h_1 + h_2)}_{h_1 h_2}\right)$

Donc $E_z = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\frac{h_1 + h_2}{H} z + \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H} z^2 + \frac{\rho_{sol} h}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 h_1 h_2}{\varepsilon_0 H}$

Soit $\boxed{E_z = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H}\left(z^2 - (h_1 + h_2) z\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_{sol} h + \frac{\rho_0 h_1 h_2}{H}\right)}$

6. La valeur max est obtenue lorsque $z^2 - (h_1 + h_2) z$ est max, donc pour $2z - (h_1 + h_2) = 0$,

donc $z = \frac{h_1 + h_2}{2}$ On note $h_{moy} = \frac{h_1 + h_2}{2}$

On connait cette valeur : $E_z(z = h_{moy}) = -E_{max}$ (en $z = h_{moy}$, le champ est "vers le bas")

Pour $z = h_{moy}$, $z^2 - (h_1 + h_2) z = h_{moy}^2 - 2 h_{moy} \cdot h_{moy} = -h_{moy}^2$

D'où $-E_{max} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H}\left(-h_{moy}^2\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_{sol} h + \frac{\rho_0 h_1 h_2}{H}\right)$

donc $-E_{max} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H}\left(h_{moy}^2 - h_1 h_2\right) + \frac{\rho_{sol} h}{\varepsilon_0}$

$h_{moy}^2 - h_1 h_2 = \frac{h_1^2}{4} + \frac{h_2^2}{4} + \frac{h_1 h_2}{2} - h_1 h_2$

$= \frac{1}{4}\left(h_1^2 + h_2^2 - 2 h_1 h_2\right)$

$= \frac{1}{4}(h_1 - h_2)^2 = \frac{H}{4}$

$= -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 \cancel{H}} \cdot \cancel{H^2}/4 + \frac{\rho_{sol} h}{\varepsilon_0}$

et donc $\boxed{\rho_0 = \frac{4\varepsilon_0}{H}\left(\frac{\rho_{sol} h}{\varepsilon} + E_{max}\right)}$ A.N : $\rho_0 = 1,2 \cdot 10^{-9}\ C \cdot m^{-3}$

$Q = S\int_{h_{moy}}^{h_2} \rho(z)\, dz = S\int_{h_{moy}}^{h_2}\left(-\rho_0 + \frac{2\rho_0}{H}(z - h_1)\right) dz = \rho_0 S\left(\int_{h_{moy}}^{h_2} -\left(1 + \frac{2h_1}{H}\right) dz + \frac{2}{H}\int_{h_{moy}}^{h_2} z\, dz\right)$

$$= \rho_0 S \left(-\left(1+\frac{2h_1}{H}\right)(h_2 - h_{moy}) + \frac{2}{H}\cdot\frac{1}{2}\left(h_2^2 - h_{moy}^2\right)\right)$$

$$= \frac{\rho_0 S}{H}\left(-\underbrace{(H+2h_1)}_{h_1+h_2}\underbrace{(h_2 - h_{moy})}_{\frac{h_2-h_1}{2}} + h_2^2 - h_{moy}^2 \right)$$

$$= \frac{\rho_0 S}{2H}\left(\underbrace{(h_1+h_2)(h_1-h_2)}_{h_1^2-h_2^2} + 2h_2^2 - \frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} - h_1 h_2 \right)$$

$$= \frac{\rho_0 S}{2H}\left(\frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{2} - h_1 h_2 \right) = \frac{\rho_0 S \cancel{H^2}}{4\cancel{H}}$$

finalement, $\boxed{Q = \frac{\rho_0 S H}{4}}$ A.N : $Q = 2{,}3\ C$

comparaison : condensateur $C = 1\ mF$ chargé sous $100\ V$: $Q = 0{,}1\ C$

c'est une charge "élevée", mais sur tout un gros nuage ...

7. $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$, donc $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

On distingue plusieurs zones :

- $0 < z < h$: $E_z = \frac{\rho_{sol}\, z}{\varepsilon_0}$ donc $\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\rho_{sol}\, z}{\varepsilon_0}$ et on intègre :

$V = -\frac{\rho_{sol}\, z^2}{2\varepsilon_0} + c^{ste}$. Comme on veut $V(z=0) = 0$, $c^{ste} = 0$.

donc $\boxed{V = -\frac{\rho_{sol}\, z^2}{2\varepsilon_0}}$ et $V(z=h) = -\frac{\rho_{sol}\, h^2}{2\varepsilon_0}$

- $h < z < h_1$: $E_z = E_0$ (on note $E_0 = E_z(z=h) = \frac{\rho_{sol} h}{\varepsilon_0}$)

donc $\frac{\partial V}{\partial z} = -E_0 \Rightarrow V = -E_0 z + c^{ste}$

Par continuité avec le domaine précédent, on doit avoir :

$$-\frac{\rho_{sol}\, h^2}{2\varepsilon_0} = -E_0 h + c^{ste} \Rightarrow c^{ste} = E_0 h - \frac{\rho_{sol} h^2}{2\varepsilon_0} = \frac{\rho_{sol} h^2}{\varepsilon_0} - \frac{\rho_{sol} h^2}{2\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\rho_{sol} h^2}{2\varepsilon_0}$$

donc $\boxed{V = \frac{\rho_{sol} h^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho_{sol} h}{\varepsilon_0} z}$

On peut en déduire la ddp entre le sol et la base du nuage, égale à $V(z=h_1)$:

$$U = V(z=h_1) - V(z=0) = \frac{\rho_{sol} h}{\varepsilon_0}\left(\frac{h}{2} - h_1\right) - 0$$

d'où $\boxed{U = -\frac{\rho_{sol} h}{2\varepsilon_0}(2h_1 - h)}$ A.N : $U = -1{,}2.10^8\,V$

c'est très élevé, mais sur une grande distance. la tension sous laquelle est transportée l'énergie électrique est de $4.10^5\,V$.

- $h_1 < z < h_2$: $E_z = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H}\left(z^2 - (h_1+h_2)z\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho_{sol} h + \rho_0 \frac{h_1 h_2}{H}\right)$

d'où $-\frac{\partial V}{\partial z}$, et on intègre :

$$\boxed{V = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0 H}\left(\frac{z^3}{3} - \frac{(h_1+h_2)}{2} z^2\right) + \frac{1}{\varepsilon_0}\left((\rho_{sol} h) + \frac{\rho_0 h_1 h_2}{H}\right) z + c^{ste}}$$

et on détermine la constante pour continuité en $z = h_1$ ...

8. On a vu des champs de l'ordre de $100\,kV.m^{-1}$. Cela reste inférieur aux $1000\,kV.m^{-1}$ du champ disruptif.

9. $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$ et $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (avec $V=0$ à l'infini)

Au voisinage de la sphère, $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ et $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ donc $\boxed{E = \frac{V}{R}}$

10. On veut R tq $E = E_{dis}$, donc $R = \frac{V}{E_{dis}} = \frac{\rho_{sol} z^2}{2\varepsilon_0 E_{dis}}$

A.N : $z = 2\,m \Rightarrow R = 0{,}26\,mm$

$z = 10\,m \Rightarrow R = 6{,}6\,mm$

les risques sont + élevés en altitude.

le paratonnerre a pour rôle d'attirer la foudre sur lui (donc pointu et en hauteur) pour protéger le reste. un câble permet d'évacuer les charges vers le sol.

11. Parce qu'on est + près du sol (et R + élevé).

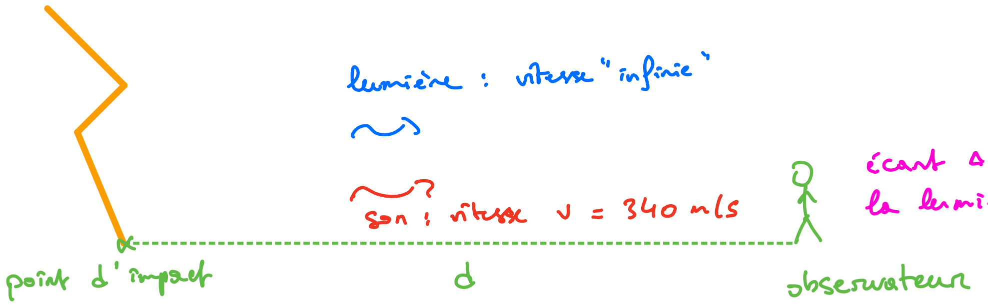
$R \sim 1\,cm \Rightarrow z = 12\,m$

12. Si on prend $Q = 1\,C$ (quelques Coulombs dans tout le nuage ...) et $\Delta t = 10^{-4}\,s$:

$i = \frac{Q}{\Delta t}$ A.N : $i = 10^4\,A$

13. $P = U i$ et $W = P\Delta t \Rightarrow W = U i \Delta t = Q U$ A.N : $W = 1 \times 10^8 = 10^8\,J$

14. échauffement ⇒ dilatation rapide de l'air ⇒ onde de choc ⇒ phénomène sonore ...



lumière : vitesse "infinie"

son : vitesse $v = 340$ m/s

écart Δt entre la réception de la lumière et celle du son

$d = v \cdot \Delta t$, il suffit de compter Δt et de multiplier par la vitesse du son.