Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 9 : 18 au 22 novembre 2024

Questions de cours

- ☐ Comme d'habitude, savoir citer toute définition, toute proposition du cours.
- ☐ Montrer que si E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}_c(E,F)$.
- ☐ Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mais n'est pas connexe par arcs. *Il est attendu de savoir justifier que l'application déterminant est continue.*
- ☐ Montrer que la suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
- ☐ Montrer qu'une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. En déduire que si pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- ☐ Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ dans les cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$. *(Le cas $\alpha = 1$ a aussi été traité en classe).*
- ☐ Pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, décroissante et positive, montrer que la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\int_0^n f(t)\mathrm{d}t\right)$ sont de même nature.

Chapitre 9 : Topologie en dimension finie

I Équivalence de normes

- théorème : en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
- cela entraîne qu'en dimension finie, les notions suivantes ne dépendent pas de la norme choisie : les ouverts, les fermés, les parties bornées, l'intérieur, l'adhérence, la frontière d'une partie, les suites convergentes (et leurs limites), les suites bornées, les fonctions continues, les fonctions bornées, les parties compactes, les parties connexes par arcs.
- si E est de dimension finie et si $\mathcal{B}$ est une base de E, la convergence d'une suite à valeurs dans E est équivalente à la convergence de chacune de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. L'existence d'une limite d'une fonction à valeurs dans E est équivalente à l'existence d'une limite de chacune de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

II Compacts en dimension finie

- si E est de dimension finie et si K est une partie de E, alors K est un compact si et seulement si K est fermé et borné.
- théorème de Bolzano-Weierstrass : dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence.
- dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une suite bornée converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence.
- si E est un espace vectoriel normé et si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors F est un fermé de E.

III Continuité des applications linéaires, multilinéaires, polynomiales

- si E est de dimension finie, toute application linéaire $f : E \to F$ est continue.
- définition d'une application polynomiale. Toute application polynomiale définie sur un espace vectoriel de dimension finie est continue.
- toute application p-linéaire définie sur un produit d'espaces vectoriels de dimension finie est continue.
- exemples du déterminant, de $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AB$, de $(u, v) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \mapsto v \circ u$.

Chapitre 10 : Séries

I Étude des séries

I.1 Sommes partielles

- somme partielle d'une série à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. Convergence, divergence d'une série.
- en cas de convergence, somme d'une série, restes d'une série. La suite des restes tend vers 0. Linéarité de la somme.
- dans une base $\mathcal{B}$ de E, la convergence d'une série $\sum u_n$ est équivalente à celle des séries coordonnées. Cas des séries à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

I.2 Condition nécessaire de convergence

- si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0.
- divergence grossière.

I.3 Série $\sum(u_{k+1} - u_k)$

- la série télescopique $\sum(u_{k+1} - u_k)$ et la suite (u_n) sont de même nature.

I.4 Séries de référence

- séries géométriques $\sum q^n$.
- séries de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$.
- séries exponentielles $\sum \dfrac{z^n}{n!}$, où $z \in \mathbb{C}$.

II Séries à termes positifs

II.1 Généralités

- une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
- règle de d'Alembert.

II.2 Théorèmes de comparaison

- théorèmes de comparaison des séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Cas $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cas $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, cas $u_n = o(v_n)$ et cas $u_n \sim v_n$.

II.3 Comparaison série-intégrale

- étude de la série $\sum f(n)$, où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. La série $\sum_{n \geqslant 0} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)\mathrm{d}t\right)_n$ converge.

III Séries vectorielles

III.1 Convergence absolue

- série absolument convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie.
- toute série absolument convergente est convergente. Inégalité triangulaire pour la somme.
- exponentielle de matrice, exponentielle d'endomorphisme. Calculs de $\exp(A)$ si A est la matrice identité, la matrice nulle, diagonale, diagonalisable, nilpotente.

Hors programme cette semaine :

III.2 Produit de Cauchy

- définition du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Convergence absolue et somme du produit de Cauchy.
- si A et B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$. Cas des endomorphismes.

III.3 Critère des séries alternées

- critère des séries alternées. Signe de la somme partielle, signe et majoration du reste.

III.4 Sommation des relations de comparaison

- sommation des relations de comparaison, cas convergent et cas divergent.
- application au développement asymptotique de la série harmonique.
- application au théorème de Cesàro, cas fini et cas infini.

à suivre la semaine prochaine : familles sommables.