Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 10 : 25 au 29 novembre 2024

Questions de cours

- Comme d'habitude, savoir citer toute définition, toute proposition du cours.
 - Rappeler la définition d'une série alternée, puis démontrer qu'une telle série converge et que sa somme partielle est de signe constant du même signe que son premier terme.
 - Énoncer les deux théorèmes de sommation des relations de comparaison (cas convergent et cas divergent). Déterminer un équivalent de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.
 - Démontrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.
 - On suppose acquis le résultat de la question précédente.* Montrer qu'il existe une constante γ telle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
 - Montrer que $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{2^n}$ existe et calculer cette somme.
 - Énoncer et démontrer la proposition relative au produit de Cauchy.
-

Chapitre 10 : Séries

I Étude des séries

I.1 Sommes partielles

- somme partielle d'une série à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. Convergence, divergence d'une série.
- en cas de convergence, somme d'une série, restes d'une série. La suite des restes tend vers 0. Linéarité de la somme.
- dans une base $\mathcal{B}$ de E , la convergence d'une série $\sum u_n$ est équivalente à celle des séries coordonnées. Cas des séries à valeurs dans $\mathbb{C}$.
- la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

I.2 Condition nécessaire de convergence

- si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) tend vers 0.
- divergence grossière.

I.3 Série $\sum(u_{k+1} - u_k)$

- la série télescopique $\sum(u_{k+1} - u_k)$ et la suite (u_n) sont de même nature.

I.4 Séries de référence

- séries géométriques $\sum q^n$.
- séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.
- séries exponentielles $\sum \frac{z^n}{n!}$, où $z \in \mathbb{C}$.

II Séries à termes positifs

II.1 Généralités

- une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.
- règle de d'Alembert.

II.2 Théorèmes de comparaison

- théorèmes de comparaison des séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Cas $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, cas $u_n = O(v_n)$, cas $u_n = o(v_n)$ et cas $u_n \sim v_n$.

II.3 Comparaison série-intégrale

- étude de la série $\sum f(n)$, où $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue par morceaux et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. La série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t) dt \right)_n$ converge.

III Séries vectorielles

III.1 Convergence absolue

- série absolument convergente à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie.
- toute série absolument convergente est convergente. Inégalité triangulaire pour la somme.
- exponentielle de matrice, exponentielle d'endomorphisme. Calculs de $\exp(A)$ si A est la matrice identité, la matrice nulle, une matrice diagonale, diagonalisable, nilpotente.

III.2 Produit de Cauchy

- définition du produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Convergence absolue et somme du produit de Cauchy.
- si A et B commutent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$. Cas des endomorphismes.

III.3 Critère des séries alternées

- critère des séries alternées. Signe de la somme partielle, signe et majoration du reste.

III.4 Sommation des relations de comparaison

- sommation des relations de comparaison, cas convergent et cas divergent.
- application au développement asymptotique de la série harmonique.
- application au théorème de Cesàro, cas fini et cas infini.

Chapitre 11 : Familles sommables et ensembles dénombrables

I Familles sommables de réels positifs

I.1 Somme d'une famille de réels positifs

- calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$.
- toute partie non vide de $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure.
- somme d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ définie par $\sum_{i \in I} u_i = \left\{ \sum_{i \in F} u_i, F \text{ partie finie de } I \right\}$.
Cas où I est fini. Cas où $I = \mathbb{N}$ (lien avec les séries).
- invariance de la somme par permutation.

I.2 Famille sommable de $(\mathbb{R}^+)^I$

- famille sommable d'éléments de $\mathbb{R}^+$.
- opérations sur les familles sommables : somme, multiplication par un réel positif.

I.3 Sommation par paquets

- si I est la réunion disjointe des $I_j, j \in J$, et si $(u_i)_{i \in I}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, alors $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$.
- théorème de Fubini positif, cas de la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$. Extension à tout produit cartésien fini.

II Familles sommables de nombres complexes

II.1 Famille sommable de $\mathbb{C}^I$

- famille sommable de nombres complexes, notation $\ell^1(I)$.
- somme d'une famille sommable. Si (u_k) est une famille à valeurs réelles, alors $\sum u_k = \sum u_k^+ - \sum u_k^-$.
Si (u_k) est à valeurs complexes, alors $\sum u_k = \sum \Re(u_k) + i \sum \Im(u_k)$.
- si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie F de I telle que $\left| \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in F} u_i \right| \leq \varepsilon$.
- invariance de la somme par permutation.
- si (v_i) est une famille sommable de réels positifs et si $\forall i, |u_i| \leq v_i$, alors (u_i) est sommable.
- combinaison linéaire de familles sommables.

II.2 Sommation par paquets

- théorème de sommation par paquets (cas sommable).
- théorème de Fubini (cas sommable), cas de la famille $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times J}$. Extension à tout produit cartésien fini.

II.3 Produit de Cauchy

- démonstration de la proposition sur le produit de Cauchy vue au chapitre précédent.

III Ensembles dénombrables

III.1 Bijection avec $\mathbb{N}$

- un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
- toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
- un ensemble est au plus dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il est fini ou dénombrable.
- exemples d'ensembles dénombrables : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$.

III.2 Ensembles infinis non dénombrables

- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- autres exemples : les intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\{0; 1\}^{\mathbb{N}}$.

III.3 Propriétés des ensembles dénombrables

- une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
- le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
- exemples : $\mathbb{N}^k$, $\mathbb{Z}^k$, $\mathbb{Q}^k$, $\mathbb{Q}[X]$.
- l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable.
- le support d'une famille sommable $(u_i)_{i \in I}$ est défini par $\{i \in I, u_i \neq 0\}$. Il est au plus dénombrable.

À suivre la semaine prochaine :

dérivation et intégration des fonctions vectorielles.