Cinétique, dynamique et Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)

Introduction : cinétique

Cinétique	La cinétique est un domaine de la mécanique qui consiste à effectuer des bilans d'énergie dans des systèmes en mouvement (le plus souvent en mouvement uniforme). L'aboutissement de la cinétique est l'application du théorème de l'énergie cinétique (ou théorème de l'énergie - puissance).

1 Torseur cinétique

1.1 Définition

Torseur cinétique

Le torseur cinétique $\{\mathcal{C}_{S/R}\}$ d'un solide S en mouvement par rapport à un repère R est défini par :

$$\{\mathcal{C}_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{p_{S/R}} = \int_V \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \int_V \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm \end{Bmatrix}_A \quad \text{(expression rarement utilisée)}$$

avec P un point du solide S de volume V, A un point quelconque et R un référentiel galiléen.

- $\overrightarrow{p_{S/R}}$ est la **résultante cinétique** du mouvement de S/R.

  Elle est appelée **quantité de mouvement** en physique (ici, du solide).
- $\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}$ est le **moment cinétique** du mouvement de S/R exprimé au point A.

En SI, la résultante cinématique est aussi notée $\overrightarrow{\boldsymbol{R_{c(S/R)}}}$.

L'expression précédente du torseur cinétique $\{\mathcal{C}_{S/R}\}$ n'étant pas pratique à utiliser, nous allons essayer de la relier à une expression faisant intervenir la matrice d'inertie sur solide S (explicitée dans le cours précédent).

<u>Rappel</u> : La définition du centre de gravité s'écrit : $m.\overrightarrow{AG} = \int_V \overrightarrow{AP}.dm$

Simplification de la résultante du torseur $\{\boldsymbol{\mathcal{C}_{S/R}}\}$:

En dérivant cette relation par rapport au temps dans un repère R avec A un point fixe dans R, on obtient :

$$m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} = \int_V \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm = \overrightarrow{p_{S/R}}$$

Simplification du moment du torseur $\{\boldsymbol{\mathcal{C}_{S/R}}\}$:

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}} = \int_V \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{V_{P\in S/R}}.dm = \int_V \overrightarrow{AP} \wedge \underbrace{\left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)}_{\text{théorème de Varignon}}.dm$$

$$= \underbrace{\left(\int_V \overrightarrow{AP}.dm\right)}_{m.\overrightarrow{AG}} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + \underbrace{\int_V \overrightarrow{AP} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \wedge \overrightarrow{AP}\right).dm}_{[I]_{A,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \text{ (voir partie C02-01 §2.2)}} = m.\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V_{A\in S/R}} + [I]_{A,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

Torseur cinétique Expression à retenir	Le torseur cinétique $\{\mathcal{C}_{S/R}\}$ d'un solide S en mouvement par rapport à un repère R est défini par : $$\{\mathcal{C}_{S/R}\}=\begin{Bmatrix} \overrightarrow{p_{S/R}}=m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}=m.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}}+[I]_{A,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{Bmatrix}_A$$ avec R un référentiel galiléen ; A un point quelconque ; m la masse du solide S de centre de gravité G ; $[I]_{A,S}$ la matrice d'inertie de S en A ; $\overrightarrow{p_{S/R}}$ est la **résultante cinétique** du mouvement de S/R ; $\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}$ est le **moment cinétique** du mouvement de S/R exprimé au point A.

Le torseur cinétique étant un torseur, il possède les mêmes propriétés mathématiques que les torseurs déjà vus. C'est-à-dire que :

- la résultante $\overrightarrow{p_{S/R}}$ est invariante par changement de point ;
- le moment satisfait à la relation de changement de point de torseur (relation de Varignon) qui s'écrit :

$$\overrightarrow{\sigma_{B,S/R}}=\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{p_{S/R}}$$

1.2 Cas particuliers

- En G, centre de gravité (ou d'inertie), on obtient :

$$\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}=[I]_{G,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\ \Rightarrow\{\mathcal{C}_{S/R}\}=\begin{Bmatrix} m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ [I]_{G,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{Bmatrix}_G$$

- En A, si A est fixe par rapport à R $\left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}}=\vec{0}\right)$, on obtient :

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}=[I]_{A,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\ \Rightarrow\{\mathcal{C}_{S/R}\}=\begin{Bmatrix} m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ [I]_{A,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{Bmatrix}_A$$

- Si le mouvement de S/R est une translation $\left(\overrightarrow{\Omega_{S/R}}=\vec{0}\right)$, on obtient :

$$\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}=m.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}}\ \Rightarrow\{\mathcal{C}_{S/R}\}=\begin{Bmatrix} m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ m.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}} \end{Bmatrix}_A$$

- Si G est fixe par rapport à R $\left(\overrightarrow{V_{G\in S/R}}=\vec{0}\right)$, on obtient :

$$\{\mathcal{C}_{S/R}\}=\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ [I]_{G,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{Bmatrix}_G \text{ et } \{\mathcal{C}_{S/R}\}=\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ [I]_{G,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}=m.\overrightarrow{AG}\wedge\overrightarrow{V_{A\in S/R}}+[I]_{A,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \end{Bmatrix}_A$$

Ce dernier cas est très fréquent, par exemple pour les arbres d'un réducteur.

Introduction : dynamique

Exemple : Choix de motorisation sur axe du robot d'assistance à la TMS (stimulation magnétique transcrânienne).

Lors du dimensionnement de la chaîne d'énergie, il faut par exemple s'interroger sur :

- le couple moteur dans chaque phase de fonctionnement ;
- le dimensionnement des pièces en dynamique.

(anticipation de leurs déformations dues aux phénomènes dynamiques)

Les couples à fournir par les moteurs du robot dépendent de la position dans laquelle celui-ci se trouve, et également de l'accélération commandée, du poids et de la géométrie des pièces…

⇒ Toutes ces informations sont obtenues en effectuant une étude dynamique du fonctionnement.

Dynamique	La dynamique est un domaine de la mécanique qui consiste à étudier l'évolution d'actions mécaniques dans des systèmes en mouvements, faisant intervenir des accélérations (phénomènes d'inertie et évolutions temporelles).

2 Torseur dynamique

2.1 Définition

Torseur dynamique	Le torseur dynamique $\{\mathcal{D}_{S/R}\}$ d'un solide S en mouvement par rapport à un repère R est défini par : $$\{\mathcal{D}_{S/R}\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{R_{d(S/R)}} = \int_V \overrightarrow{\Gamma_{P\in S/R}}\, dm \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \int_V \overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{\Gamma_{P\in S/R}}\, dm \end{matrix}\right\}_A$$ (cette expression sera rarement utilisée) avec P un point du solide S de volume V, A un point quelconque et R un référentiel galiléen et $\overrightarrow{\Gamma_{P\in S/R}}$ l'accélération du point P de S dans le référentiel R. - $\overrightarrow{R_{d(S/R)}}$ est la **résultante dynamique** du mouvement de S/R. Elle est aussi appelée quantité d'accélération en physique. - $\overrightarrow{\delta_{A,S/R}}$ est le **moment dynamique** du mouvement de S/R.

L'expression du torseur dynamique $\{\mathcal{D}_{S/R}\}$ précédente n'étant pas pratique à utiliser, nous allons essayer de la relier à une expression faisant intervenir les termes du torseur cinétique $\{\mathcal{C}_{S/R}\}$.

Forme simplifiée du torseur $\{\mathcal{D}_{S/R}\}$ dans le cas d'un solide homogène :

Torseur dynamique **Expression à retenir**	Le torseur dynamique $\{\mathcal{D}_{S/R}\}$ d'un solide S en mouvement par rapport à un repère R est défini par : $\{\mathcal{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{matrix} \overrightarrow{R_{d(S/R)}} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{dt}\right]_R + \boldsymbol{m}\,\overrightarrow{\boldsymbol{V_{A\in S/R}}} \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{V_{G\in S/R}}} \end{matrix} \right\}_A$ avec R un référentiel galiléen ; A un point quelconque ; m la masse du solide S de centre de gravité G ; $\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}$ le moment cinétique de S/R en A ; $\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R}}$ l'accélération du centre de gravité G de S dans le référentiel R ; $\overrightarrow{R_{d(S/R)}}$ est la **résultante dynamique** du mouvement de S/R (en N); $\overrightarrow{\delta_{A,S/R}}$ est le **moment dynamique** du mouvement de S/R (en N.m).

Le torseur dynamique étant un torseur, il possède les mêmes propriétés mathématiques que les torseurs déjà vus. C'est-à-dire que :

- la résultante $\overrightarrow{R_{d(S/R)}}$ est invariante par changement de point (elle est toujours égale à l'accélération du centre de gravité du solide multipliée par la masse);
- le moment satisfait à la relation de changement de point de torseur (relation de Varignon) qui s'écrit :

$$\overrightarrow{\delta_{B,S/R}} = \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R_{d(S/R)}} = \overrightarrow{\delta_{A,S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R}}$$

2.2 Cas particuliers

À partir de l'expression obtenue précédemment : $\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{dt}\right]_R + m\,\overrightarrow{V_{A\in S/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}}$, on peut définir les cas particuliers suivants :

- En G, centre de gravité (ou d'inertie), on obtient :

$$\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\left([I]_{G,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)}{dt}\right]_R \Rightarrow \{\mathcal{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{matrix} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R}} \\ \left[\frac{d\left([I]_{G,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)}{dt}\right]_R \end{matrix} \right\}_G$$

- En A, si A est fixe par rapport à R $\left(\overrightarrow{V_{A\in S/R}} = \vec{0}\right)$, on obtient :

$$\overrightarrow{\delta_{A,S/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{A,S/R}}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\left([I]_{A,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)}{dt}\right]_R \Rightarrow \{\mathcal{D}_{S/R}\} = \left\{ \begin{matrix} m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R}} \\ \left[\frac{d\left([I]_{A,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)}{dt}\right]_R \end{matrix} \right\}_A$$

<u>Remarque pour la simplification des calculs</u> :

Souvent, on cherchera uniquement le moment dynamique suivant une direction $\vec{u}$ (la direction correspondant à l'axe de rotation du solide). Il sera donc rapide de chercher uniquement $\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} \cdot \vec{u}$. Ce scalaire est obtenu par la relation, **valable uniquement en $\boldsymbol{G}$ ou en $\boldsymbol{A}$ s'il est fixe dans $\boldsymbol{R}$** :

$$\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} \cdot \vec{u} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}}{dt}\right]_R \cdot \vec{u} = \left[\frac{d\left(\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} \cdot \vec{u}\right)}{dt}\right]_R - \overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} \cdot \left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_R$$

$$\text{car } \left[\frac{d\left(\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}\cdot\vec{u}\right)}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}}{dt}\right]_R \cdot\vec{u} + \overrightarrow{\sigma_{G,S/R}}\cdot\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_R$$

Rappel : Formule de dérivation de vecteur (formule de Bour, indispensable)

$$\left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\vec{u}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R_0}}\wedge\vec{u}$$

3 Principe Fondamental de la Dynamique

3.1 Énoncé

Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)	Soit Sys un système isolé, et R_g un référentiel Galiléen. À tout instant t : $\left\{\mathcal{T}_{\overline{Sys}\rightarrow Sys}\right\}_A = \left\{\mathcal{D}_{Sys/R_g}\right\}_A$ avec A un point quelconque (le même pour tous les torseurs !); $\left\{\mathcal{T}_{\overline{Sys}\rightarrow Sys}\right\}_A$ le torseur des actions mécaniques extérieures exercées sur le système isolé Sys ; $\left\{\mathcal{D}_{Sys/R_g}\right\}_A$ le torseur dynamique de Sys/R_g.

Remarques :

- Bien que le point de réduction soit quelconque (mais identique !), il faut le choisir astucieusement pour éviter les calculs fastidieux (centre d'inertie, point fixe,…).
- Lorsque Sys est en équilibre dans le référentiel R_g, on obtient le principe fondamental de la statique.
- Le PFD écrit sous cette forme donne 6 équations différentielles faisant intervenir :
  - les AM appliquées au système isolé ;
  - les paramètres de position du système isolé, et leurs dérivées ($1^{ères}$ et 2^{ndes}).

3.2 Théorèmes généraux de la dynamique

On déduit du principe fondamental de la dynamique les théorèmes suivants.

Théorème de la résultante dynamique	Soit Sys un système isolé, et R_g un référentiel Galiléen. À tout instant t : $m\overrightarrow{\Gamma_{G\in Sys\,/R_g}} = \overrightarrow{R_{\overline{Sys}\rightarrow Sys}}$ avec $\overrightarrow{R_{\overline{Sys}\rightarrow Sys}}$ la résultante des forces extérieures exercées sur le système isolé.

Théorème du moment dynamique	Soit Sys un système isolé, et R_g un référentiel Galiléen. À tout instant t et pour tout point A : $\overrightarrow{\delta_{A,Sys/\,R_g}} = \overrightarrow{M_{A,\overline{Sys}\rightarrow Sys}}$ avec $\overrightarrow{M_{A,\overline{Sys}\rightarrow Sys}}$ le moment des actions mécaniques extérieures exercées sur le système isolé.

Remarque : Le point A doit être choisi astucieusement (centre d'inertie, point fixe).

Théorème des actions réciproques	Soit S_1et S_2 deux systèmes distincts et un système $S = S_1 \cup S_2$, le théorème des actions réciproques (ou mutuelles) est : $$\{\mathcal{T}_{S_1\rightarrow S_2}\} = -\{\mathcal{T}_{S_2\rightarrow S_1}\}$$

4 Application – Cylindre sur un plan incliné

On considère un cylindre (S) de rayon $R = 4{,}5cm$, de longueur $l = 2cm$ et de masse $m = 250g$ sur un plan incliné (0) d'une longueur $L = 80$cm. L'inclinaison correspond à une différence de hauteur $h = 4cm$, ce qui revient à un angle $\alpha = arcsin\left(\frac{L}{h}\right) \sim 2.87°$.

On note I le point de contact entre le cylindre et le plan incliné et on considère que le roulement s'effectue sans glissement.
On note G le centre d'inertie du cylindre et $R_2 = (G, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ le repère lié au cylindre. On a $\overrightarrow{IG} = R\overrightarrow{y_1}$. Le repère $R_1 = (O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ est associé au plan incliné. On a $\theta = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2})$. Le repère monde, considéré comme galiléen est défini par $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

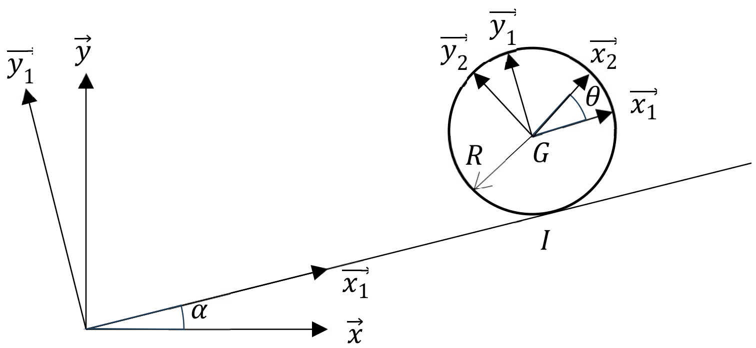
Combien de temps va mettre le cylindre à atteindre le bout du plan incliné, sans vitesse initiale ?

Est-ce que cela dépend de sa masse ? De son diamètre ?

<u>Expérimentation</u> :

Cylindre de rayon	Masse	Temps 1	Temps 2	Temps 3	Temps moyen
4,5cm	250g				

<u>Schéma :</u>



4.1 Matrice d'inertie $[\boldsymbol{I}]_{G,S}$

$$[\boldsymbol{I}]_{S,G}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{m}(\frac{\boldsymbol{R}^2}{\boldsymbol{4}}+\frac{\mathbf{l}^2}{\mathbf{12}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{m}(\frac{\boldsymbol{R}^2}{\boldsymbol{4}}+\frac{\mathbf{l}^2}{\mathbf{12}}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{m}\frac{\boldsymbol{R}^2}{\mathbf{2}} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_2})ou(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$$

4.2 Torseur cinétique en $\boldsymbol{I}$

$$\{\mathcal{C}_{S/R}\}=\begin{Bmatrix} \boldsymbol{m}.\overrightarrow{\boldsymbol{V}_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{\sigma}_{I,S/R}} \end{Bmatrix}_I$$

<u>Résultante :</u>

$\overrightarrow{V_{G\in S/R}}=\overrightarrow{V_{I\in S/R}}+\overrightarrow{GI}\wedge\overrightarrow{\Omega_{S/R}}=\vec{0}-R\dot{\theta}\overrightarrow{y_1}\wedge\overrightarrow{z_1}=-R\dot{\theta}\overrightarrow{x_1}$ car RSG et $\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\ =\ \dot{\theta}\overrightarrow{z_1}$

<u>Moment cinétique, première méthode : par définition</u>

$$\overrightarrow{\sigma_{I,S/R}}=m.\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{V_{I\in S/R}}+[I]_{I,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}$$

D'après le théorème de Huygens : $[I]_{I,S}\ =\ [I]_{G,S}+m\overrightarrow{IG}\wedge\left(\vec{u}\wedge\overrightarrow{IG}\right)$ soit

$$[I]_{I,S}\ =\begin{bmatrix} m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{\mathrm{l}^2}{12}\right) & 0 & 0 \\ 0 & m\left(\frac{R^2}{4}+\frac{\mathrm{l}^2}{12}\right) & 0 \\ 0 & 0 & m\frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}+\boldsymbol{m}\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{R}^2 \end{bmatrix}_{(\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1})}$$

Car $\overrightarrow{IG}=R\overrightarrow{y_1}$

Soit $\overrightarrow{\sigma_{I,S/R}}=\frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{z_1}$

Moment cinétique, deuxième méthode : par transport

$$\overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} = [I]_{G,S}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = m\frac{R^2}{2}\dot{\theta}\overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{I,S/R}} = \overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} + \overrightarrow{IG} \wedge m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \ = \ = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{z_1}$$

On a alors

$$\{\mathcal{C}_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} -mR\dot{\theta}\overrightarrow{x_1} \\ \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_I$$

4.3 Torseur dynamique en I

$$\{\mathcal{D}_{S/R}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{d(S/R)}} = m\,\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R}} \\ \overrightarrow{\delta_{I,S/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{I,S/R}}}{dt}\right]_R + m\,\overrightarrow{V_{I\in S/R}} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}} \end{Bmatrix}_I$$

Résultante :

$$\overrightarrow{R_{d(S/R)}} = m\overrightarrow{\Gamma_{G\in S/R}} = m\left.\frac{d\overrightarrow{V_{G\in S/R}}}{dt}\right|_R = -mR\ddot{\theta}\overrightarrow{x_1}$$

Moment dynamique, première méthode : par définition

$$\overrightarrow{\delta_{I,S/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{I,S/R}}}{dt}\right]_R + m\underbrace{\overrightarrow{V_{I\in S/R}}}_{=\vec{0}\ car\ RSG} \wedge \overrightarrow{V_{G\in S/R}} = \left[\frac{d\overrightarrow{\sigma_{I,S/R}}}{dt}\right]_R = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}\overrightarrow{z_1}$$

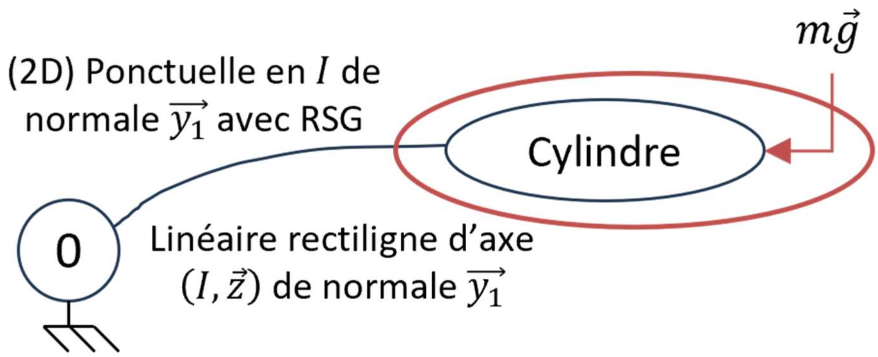
Moment dynamique, deuxième méthode : par transport

$$\overrightarrow{\delta_{G,S/R}} = m\frac{R^2}{2}\ddot{\theta}\overrightarrow{z_1} \text{ car } \overrightarrow{\sigma_{G,S/R}} \ = \ m\frac{R^2}{2}\dot{\theta}\overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{\delta_{I,S/R}} = \overrightarrow{\delta_{G,S/R}} + \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{R_{d(S/R)}} \ = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}\overrightarrow{z_1}$$

4.4 Résolution

Graphe de structure :



BAME : On suppose le problème plan.

- Réaction du support $\{\mathcal{T}_{Sol\to S}\} = \begin{Bmatrix} N\,\overrightarrow{y_1} + T\,\overrightarrow{x_1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I$ avec $\|\vec{T}\| = f\,\|\vec{N}\|$ où f est le coefficient de frottement.
- Pesanteur $\{\mathcal{T}_{pensanteur\to S}\} = \begin{Bmatrix} -mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$

Théorème du moment dynamique en I :

$$\overrightarrow{\delta_{I,S/R}} = \overrightarrow{M_{I,\bar{S}\to S}}$$

$$\overrightarrow{M_{I,pesanteur\to S}} = \overrightarrow{IG} \wedge -mg\vec{y} = Rmg\ sin(\alpha)\overrightarrow{z_1}$$

On a donc

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\theta}\overrightarrow{z_1} = Rmg\ sin(\alpha)\overrightarrow{z_1} \text{ soit } \ddot{\theta} = \frac{2gsin(\alpha)}{3R}$$

Mouvement uniformément accéléré :

$\ddot{\theta}$ est une constante d'où $\dot{\theta}(t) = \ddot{\theta}t$ et $\theta(t) = \frac{\ddot{\theta}t^2}{2}$ (conditions initiales nulles).

On note t_1l'instant pour lequel le cylindre a parcouru tout le plan incliné. On a alors $\theta(t_1) = \frac{\ddot{\theta}{t_1}^2}{2}$ et $L = R.\theta(t_1)$, d'où $\frac{\ddot{\theta}{t_1}^2}{2} = \frac{L}{R}$. En remplaçant $\ddot{\theta}$, il vient $t_1 = \sqrt{\frac{2L}{R\ddot{\theta}}} = \sqrt{\frac{3L}{g\ sin(\alpha)}} = 2{,}21s$.

Ne dépend ni de la masse ni du diamètre !