

Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 11 : 2 au 6 décembre 2024

Questions de cours

Avant l'habituelle question du cours, le colleur demandera de citer une propriété parmi la liste suivante :

- une des formules de Taylor ;
- une propriété de la fiche *Tableau récapitulatif des fonctions usuelles*.
- une primitive de la fiche *Primitives usuelles*.

Puis une question parmi :

- ☐ Si $f : I \rightarrow E$ et $g : I \rightarrow F$ sont dérivables en $a \in I$ et si $B : E \times F \rightarrow G$ est bilinéaire, alors $B(f, g)$ est dérivable en a . Déterminer $B(f, g)'(a)$.
 E et F sont – comme dans tout ce chapitre – de dimension finie.
 - ☐ Soit $\alpha > 2$. Montrer que $x \mapsto x^\alpha \sin(\frac{1}{x})$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$ et que ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
 - ☐ Énoncer le théorème de dérivation d'une fonction réciproque (sans démonstration), puis démontrer la formule de la dérivée de Arccos.
 - ☐ Montrer qu'une fonction convexe sur I est continue sur $\overset{\circ}{I}$.
 - ☐ Existence et calcul de la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $x \mapsto \int_x^{x^2} \sqrt{t + e^t} dt$.
-

Chapitre 12 : Dérivation et intégration sur un segment

Dans ce chapitre, les fonctions sont définies sur un intervalle (d'intérieur non vide) de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

I Dérivation des fonctions vectorielles

I.1 Généralités

- dérivabilité en un point, dérivabilité sur un intervalle.
- dérivabilité à droite, à gauche en un point.
- dérivabilité en a et développement limité à l'ordre 1 au voisinage de a . Pour les fonctions réelles : équation de la tangente. La dérivabilité en a implique la continuité en a .
- caractérisation de la dérivabilité à l'aide des fonctions coordonnées.
- caractérisation des fonctions constantes.

I.2 Opérations sur les fonctions dérivables

- dérivée d'une combinaison linéaire de f et g .
- dérivée de $L \circ f$, où L est linéaire.
- dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire. Cas du produit fg et du produit scalaire $\langle f, g \rangle$.
- dérivée de $M(f_1, \dots, f_p)$, où M est p -linéaire. Cas du déterminant $\det_{\mathcal{B}}$ dans une base $\mathcal{B}$.
- dérivée de $g \circ f$, où f est à valeurs réelles.

I.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

- fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur I . Chaîne d'inclusions entre les sous-espaces vectoriels $(\mathcal{C}^k(I, E))_{k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}}$ et $(\mathcal{D}^k(I, E))_{k \in \mathbb{N}^*}$ (fonctions k fois dérivables sur I).
- linéarité de $f \mapsto f^{(k)}$.
- k -ème dérivée de $L \circ f$.
- k -ème dérivée de $B(f, g)$ (formule de Leibniz) : cas particulier du produit fg .

I.4 Théorèmes liés à la dérivation

- pour les fonctions réelles : théorème de Rolle, égalité des accroissements finis.
- inégalité des accroissements finis (*voir aussi partie III.4*).
- théorème limite de la dérivée, dérivée de la fonction réciproque.
- dérivée des fonctions usuelles.

II Fonctions convexes

II.1 Généralités

- définition. Interprétation géométrique : les cordes d'une fonction convexe sont au-dessus du graphe.
- inégalité de convexité à n points (appelée inégalité de Jensen).

II.2 Caractérisations de la convexité

- caractérisation par les pentes. Vu en exercice : une fonction convexe sur I est continue sur $\overset{\circ}{I}$.
- caractérisation pour les fonctions dérivables : f' croissante, le graphe au-dessus de ses tangentes. Caractérisation pour les fonctions deux fois dérivables : $f'' \geq 0$.
- inégalités à savoir démontrer rapidement : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq 1 + x. \quad \forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1.$
 $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x.$
- points d'inflexion.

III Intégration sur un segment

III.1 Généralités

- fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans E (de dimension finie). Fonctions en escalier.
- toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée.
- intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, définie à l'aide des fonctions coordonnées de f dans une base de E .

III.2 Propriétés de l'intégrale

- linéarité de l'intégrale. Si L est linéaire, $L\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b L \circ f$.
- relation de Chasles.
- sommes de Riemann.
- inégalité triangulaire : si $a \leq b$, $\left\|\int_a^b f\right\| \leq \int_a^b \|f\|$. En particulier, $\left\|\int_a^b f\right\| \leq \|f\|_\infty(b-a)$, où $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|$.
- inégalité de la moyenne (pour les fonctions complexes) : $\left|\int_a^b fg\right| \leq \|g\|_\infty \int_a^b |f|$.

III.3 Cas particulier des fonctions réelles

- positivité et croissance de l'intégrale.
- si f est continue et positive sur $[a, b]$ et si $\int_a^b f = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$.
- produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz.

III.4 Dérivation et intégration

- primitive d'une fonction continue. Calculs de primitives.
- théorème fondamental. Dérivation des fonctions $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$.
- inégalité des accroissements finis pour $f \in \mathcal{C}^1(I, E)$, sous l'hypothèse que f' est bornée sur I .

III.5 Formules de Taylor

- Taylor avec reste intégral.
- Taylor-Lagrange.
- Taylor-Young. C'est une formule locale, contrairement aux deux précédentes.

À suivre la semaine prochaine :
intégration sur un intervalle quelconque.