

Centre de gravité d'un disque percé

Q.1. Déterminer la position du centre de masse G en fonction de r , R et e dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$.

On remarque que les plans $(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $(A, \vec{u}, \vec{z})$ sont des plans de symétrie, on en déduit que le centre de masse est situé sur $(A, \vec{u})$, intersection des plans de symétrie. Il vient alors $\vec{AG} = u_G \vec{u}$

$$\vec{AG} = \frac{1}{m_{tot}} \sum_{i=1}^2 m_i \vec{AG}_i = \frac{1}{\rho V_{tot}} \sum_{i=1}^2 \rho V_i \vec{AG}_i = \frac{1}{V_{tot}} \sum_{i=1}^2 V_i \vec{AG}_i \text{ car il s'agit de la même masse volumique}$$

Aussi, comme l'épaisseur est négligeable on peut assimiler le volume à la surface. Ainsi, en notant S_i les surfaces respectives des deux disques 1 et 2, G_i leur centre de masse respectif et S_{tot} la surface totale :

$$\vec{AG} = \frac{1}{S_{tot}} \sum_{i=1}^2 S_i \vec{AG}_i$$

$$\text{Soit en projection sur } \vec{u}: u_G = \frac{1}{S_{tot}} \sum_{i=1}^2 S_i u_{G_i} = \frac{1}{S_1 - S_2} (S_1 u_{G_1} - S_2 u_{G_2}) = \frac{-S_2 e}{S_1 - S_2} = \frac{-r^2 e}{R^2 - r^2} \text{ car } u_{G_1} = 0.$$

On souhaite ramener en A le centre de masse de l'ensemble. Pour cela, on dispose de deux masses ponctuelles additionnelles de coordonnées $P_3(u_3, v_3, 0)$ et $P_4(u_4, v_4, 0)$, de masses respectives m_3 et m_4 .

Q.2. Déterminer les conditions à poser sur les coordonnées u_3, v_3, u_4 et v_4 de ces deux points afin d'atteindre l'objectif proposé.

En rajoutant les masses on veut avoir le nouveau centre de gravité (noté G') en A , donc

$$\vec{AG'} = \vec{0} = \frac{1}{m + m_3 + m_4} \left(\frac{-mr^2 e}{R^2 - r^2} \vec{u} + m_3(u_3 \vec{u} + v_3 \vec{v}) + m_4(u_4 \vec{u} + v_4 \vec{v}) \right)$$

$$\text{On projection sur } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-mr^2 e}{R^2 - r^2} + m_3 u_3 + m_4 u_4 = 0 \\ m_3 v_3 + m_4 v_4 = 0 \end{cases}$$

Parallélépipède percé

Q.3. Le solide S se décompose en deux volumes de forme simple : un parallélépipède 1 et un cylindre 2.

On a alors $[I]_{O,S} = [I]_{O,1} - [I]_{O,2}$

$$= m_1 \begin{bmatrix} \frac{b^2 + c^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 + c^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2 + b^2}{12} \end{bmatrix}_R - m_2 \begin{bmatrix} \frac{c^2}{12} + \frac{R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{12} + \frac{R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}$$

Avec $m_1 = \rho abc$ et $m_2 = \rho \pi R^2 c$ (même masse volumique mais pas le même volume).

Q.4. Avant de pouvoir soustraire les matrices d'inertie, il faut utiliser le théorème de Huygens pour changer le point d'expression, avec $\vec{OG_2} = d\vec{x}$

$$[I]_{2,O} = [I]_{2,G_2} + m_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 \end{bmatrix}$$

Agitateur de solution médicale

Q.5. Le moment d'inertie I_{O_3z} de l'ensemble mobile {1} est la somme des moments d'inertie en O_3 sur l'axe $\vec{z}$ de chacun de ses constituants :

Plaques 1

De manière évidente, les deux plaques 1 apportent le même moment d'inertie sur l'axe $(O_3, \vec{z})$.

On identifie dans la matrice d'inertie : $a = L_{31}$; $b = h_{31}$; $c = e_3$.

Et on a $\overrightarrow{O_3G_1} = x_1\vec{x} + z_1\vec{z}$ en fonction de la plaque et où $x_1 = \frac{L_{31}}{2}$.

Soit en utilisant le théorème de Huygens et en ne prenant que le moment suivant $\vec{z}$:

$$I_1 = \frac{m_{31}}{12} (L_{31}^2 + h_{31}^2) + m_{31} \left(\frac{L_{31}}{2} \right)^2 \text{ soit en considérant } h_{31}^2 \ll L_{31}^2 : I_1 = \frac{m_{31}L_{31}^2}{3}$$

Plaques 2

On identifie dans la matrice d'inertie : $a = e_3$; $b = h_{32}$; $c = L_{32}$.

Et on a $\overrightarrow{O_3G_2} = x_2\vec{x}$ où $x_2 \approx L_{31}$.

Soit en utilisant le théorème de Huygens et en ne prenant que le moment suivant $\vec{z}$:

$$I_2 = \frac{m_{32}}{12} (e_3^2 + h_{32}^2) + m_{32}L_{31}^2 \text{ soit en considérant } h_{32}^2 \ll L_{31}^2 \text{ et } e_3^2 \ll L_{31}^2 : I_2 = m_{32}L_{31}^2$$

Plaques 3

On identifie dans la matrice d'inertie : $a = e_3$; $b = h_{33}$; $c = L_{33}$.

Et on a $\overrightarrow{O_3G_3} = d\vec{x}$.

Soit en utilisant le théorème de Huygens et en ne prenant que le moment suivant $\vec{z}$:

$$I_3 = \frac{m_{33}}{12} (e_3^2 + h_{33}^2) + m_{33}d^2 \text{ soit en considérant } h_{33}^2 \ll d^2 \text{ et } e_3^2 \ll d^2 : I_3 = m_{33}d^2$$

Cylindre M2

Attention à prendre le bon moment d'inertie.

On a $\overrightarrow{O_3G_{M2}} = x_{G_{M2}}\vec{x}_3 + y_{G_{M2}}\vec{y}_3 = 200\vec{x}_3 + 40\vec{y}_3$

Soit en utilisant le théorème de Huygens et en ne prenant que le moment suivant $\vec{z}$:

$$I_{G_{M2}} = \frac{m_2}{12} \left(3 \left(\frac{D_{M2}}{2} \right)^2 + h_{M2}^2 \right) + m_2 x_{G_{M2}}^2$$

soit en considérant $D_{M2} \ll x_{G_{M2}}$ et $h_{M2} \ll x_{G_{M2}} : I_{G_{M2}} = m_2 x_{G_{M2}}^2$

Cylindre C

On a $\overrightarrow{O_3G_c} = x_{G_c}\vec{x}_3 + y_{G_c}\vec{y}_3 = 400\vec{x}_3 - 30\vec{y}_3$

Soit en utilisant le théorème de Huygens et en ne prenant que le moment suivant $\vec{z}$:

$$I_{G_c} = \frac{m_{cr}}{2} \left(\frac{D_{cr}}{2} \right)^2 + m_{cr} x_{G_c}^2$$

Soit en considérant $D_{cr} \ll x_{G_c}$:

$$I_{G_c} = m_{cr} x_{G_c}^2$$

Enfin :

$$I_{O_3z} = \frac{2}{3} m_{31} L_{31}^2 + m_{32} L_{31}^2 + m_{33} d^2 + m_2 x_{G_{M2}}^2 + m_{cr} x_{G_c}^2$$