

Yoyo : matrice d'inertie, moments et produits d'inertie, TEC et PFD

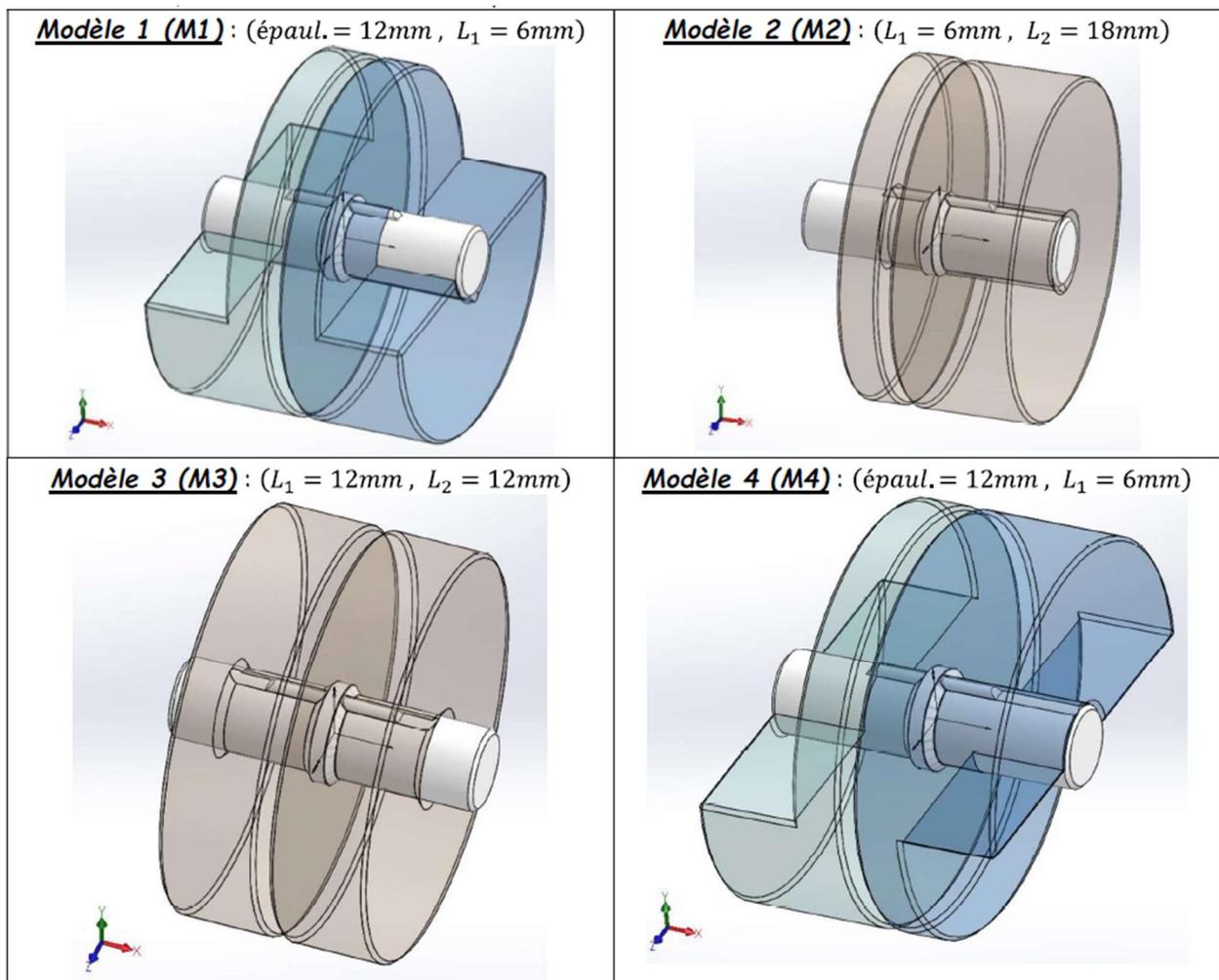
L'objectif du TD est de comprendre l'incidence de la répartition des masses sur le mouvement d'un solide en rotation et de relier cette répartition à la matrice d'inertie.

1. Présentation

Quatre modèles de yoyo ont été réalisés. Ils ont tous la même masse $M = 62g$. Les épaisseurs varient suivant les modèles entre 6, 12 et 18mm. Pour les modèles ayant un épaulement, la matière enlevée a été déplacé de l'autre côté de sorte que la répartition des masses reste la même.

Tous les modèles ont un diamètre extérieur tel que $D = 2 \cdot R$ et $R = 25mm$.

Le repère de référence est celui indiqué en bas à gauche avec l'origine au centre de l'axe dont la longueur est $L = 38mm$. Le fil s'enroule autour de la partie centrale de l'axe dont le rayon est $r = 6mm$.



2. Analyse expérimentale

Q.1. Sans calcul, donner qualitativement et comparer les positions des centres de gravité de chacun des modèles. On notera G_i le centre d'inertie du modèle i dont les coordonnées sont $\overrightarrow{OG_i} = x_{G_i}\vec{x} + y_{G_i}\vec{y} + z_{G_i}\vec{z}$.



La notation pour la matrice d'inertie est la suivante : $I_{G_i, M_i} = \begin{bmatrix} A_{G_i M_i} & -F_{G_i M_i} & -E_{G_i M_i} \\ -F_{G_i M_i} & B_{G_i M_i} & -D_{G_i M_i} \\ -E_{G_i M_i} & -D_{G_i M_i} & C_{G_i M_i} \end{bmatrix}_{G_i}$

- Q.2.** Donner les formes des matrices d'inertie des quatre modèles en leur centre d'inertie. On ne cherchera pas à donner les expressions de chacun des termes.
- Q.3.** Sans calcul, quels sont les modèles qui auront le même moment d'inertie autour de (O, \vec{x}) et ceux qui auront un moment d'inertie différent.
- Q.4.** Sans calcul, anticiper le fonctionnement de chacun des modèles de yoyo et ce qui risque de gêner le bon fonctionnement.

3. Analyse numérique

Vous disposez ci-dessous des caractéristiques de masse données par Solidworks pour chacun des modèles.

- Q.5.** Déterminer à quel modèle correspond chaque propriété massique. Vérifier la cohérence de vos réponses par rapport aux réponses précédentes.

<u>Propriétés massiques 1 :</u>	<u>Propriétés massiques 2 :</u>
<p>Centre de gravité: (millimètres) X = 6.04 Y = 0.00 Z = 0.00</p> <p>Principaux axes et moments d'inertie: (grammes * millimètres carrés) Pris au centre de gravité. Ix = (0.00, 0.00, 1.00) Px = 13371.14 Iy = (0.00, -1.00, 0.00) Py = 13372.83 Iz = (1.00, 0.00, 0.00) Pz = 18949.36</p> <p>Moments d'inertie: (grammes * millimètres carrés) Pris au centre de gravité et aligné avec le système de coordonnées de sortie. Lxx = 18949.36 Lxy = 0.00 Lxz = 0.00 Lyx = 0.00 Lyy = 13372.83 Lyz = 0.00 Lzx = 0.00 Lzy = 0.00 Lzz = 13371.14</p>	<p>Centre de gravité: (millimètres) X = 0.00 Y = 0.00 Z = 0.00</p> <p>Principaux axes et moments d'inertie: (grammes * millimètres carrés) Pris au centre de gravité. Ix = (0.00, 0.00, 1.00) Px = 13387.12 Iy = (0.00, -1.00, 0.00) Py = 13388.81 Iz = (1.00, 0.00, 0.00) Pz = 18949.36</p> <p>Moments d'inertie: (grammes * millimètres carrés) Pris au centre de gravité et aligné avec le système de coordonnées de sortie. Lxx = 18949.36 Lxy = 0.00 Lxz = 0.00 Lyx = 0.00 Lyy = 13388.81 Lyz = 0.00 Lzx = 0.00 Lzy = 0.00 Lzz = 13387.12</p>
<u>Propriétés massiques 3 :</u>	<u>Propriétés massiques 4 :</u>
<p>Centre de gravité: (millimètres) X = 0.00 Y = -5.15 Z = 0.00</p> <p>Principaux axes et moments d'inertie: (grammes * millimètres carrés) Pris au centre de gravité. Ix = (0.00, 0.00, 1.00) Px = 13989.37 Iy = (0.00, -1.00, 0.00) Py = 15629.03 Iz = (1.00, 0.00, 0.00) Pz = 17296.29</p> <p>Moments d'inertie: (grammes * millimètres carrés) Pris au centre de gravité et aligné avec le système de coordonnées de sortie. Lxx = 17296.29 Lxy = 0.00 Lxz = 0.00 Lyx = 0.00 Lyy = 15629.03 Lyz = 0.00 Lzx = 0.00 Lzy = 0.00 Lzz = 13989.37</p>	<p>Centre de gravité: (millimètres) X = 0.00 Y = 0.00 Z = 0.00</p> <p>Principaux axes et moments d'inertie: (grammes * millimètres carrés) Pris au centre de gravité. Ix = (0.56, 0.83, 0.00) Px = 12848.56 Iy = (0.00, 0.00, 1.00) Py = 15635.35 Iz = (0.83, -0.56, 0.00) Pz = 21722.74</p> <p>Moments d'inertie: (grammes * millimètres carrés) Pris au centre de gravité et aligné avec le système de coordonnées de sortie. Lxx = 18942.27 Lxy = 4116.23 Lxz = 0.00 Lyx = 4116.23 Lyy = 15629.03 Lyz = 0.00 Lzx = 0.00 Lzy = 0.00 Lzz = 15635.35</p>

- Q.6.** Vérifier la cohérence de la valeur du moment d'inertie du modèle 3 autour de l'axe (O, \vec{x}) .
- Q.7.** Pourquoi le moment d'inertie autour de l'axe (O, \vec{x}) d'un modèle est-il différent de celui des autres modèles ? Retrouver cette valeur par le calcul.

4. Analyse théorique

On considère que le yoyo du modèle 3 est attaché à un fil enroulé sur l'axe intérieur du yoyo. On le lâche et on le laisse tomber, la main reste donc fixe dans le repère monde $R_0 = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. La masse ainsi que l'enroulement du fil sont négligés. Le roulement entre le fil **0** et le yoyo **1** se fait sans glissement.

On se questionne sur l'équation du mouvement d'un tel yoyo.

Q.8. Réaliser le graphe de structure et un schéma de principe avec (O, \vec{z}) ascendant, (O, \vec{y}) vers la droite, I point de contact entre le fil et le cylindre intérieur. On note $\vec{IG} = -r\vec{y}$ et $(\vec{y}, \vec{y}_1) = \theta\vec{x}$.

Q.9. Déterminer l'expression du torseur des actions mécaniques transmissibles du fil sur le yoyo **1** ainsi que le torseur cinématique du yoyo par rapport au bâti **0**.

4.1. Équation du mouvement par le PFD

Q.10. A partir du principe fondamental dynamique, déterminer l'équation du mouvement du modèle 3 en prenant $A_{G_3M_3} = \frac{MR^2}{2}$.

4.2. Équation du mouvement par le TEC

Q.11. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique (ou théorème de l'énergie - puissance), déterminer l'équation du mouvement du modèle 3 en prenant $A_{G_3M_3} = \frac{MR^2}{2}$.

Q.12. Faire l'application numérique. La simulation numérique donne $\ddot{\theta} = 172 \text{ rad. s}^{-2}$.

Q.13. Les équations de mouvements des autres modèles seront-elles différentes ? Justifier sans calcul.