

## Yoyo : matrice d'inertie, moments et produits d'inertie, TEC et PFD

**Q.1.** Sans calcul, donner qualitativement et comparer les positions des centres de gravité de chacun des modèles. On notera  $G_i$  le centre d'inertie du modèle  $i$  dont les coordonnées sont  $\overrightarrow{OG_i} = x_{G_i}\vec{x} + y_{G_i}\vec{y} + z_{G_i}\vec{z}$ .

La notation pour la matrice d'inertie est la suivante :  $I_{G_i, M_i} = \begin{bmatrix} A_{G_i M_i} & -F_{G_i M_i} & -E_{G_i M_i} \\ -F_{G_i M_i} & B_{G_i M_i} & -D_{G_i M_i} \\ -E_{G_i M_i} & -D_{G_i M_i} & C_{G_i M_i} \end{bmatrix}_{G_i}$

**Q.2.** Donner les formes des matrices d'inertie des quatre modèles en leur centre d'inertie. On ne cherchera pas à donner les expressions de chacun des termes.

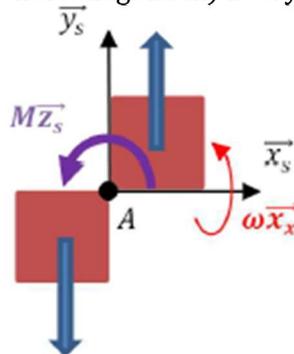
Modèle	1	2	3	4
Symétrie	Plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ Plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$	Axe de révolution $(O, \vec{x})$	Plan $(O, \vec{y}, \vec{z})$ Axe de révolution $(O, \vec{x})$	Plan $(O, \vec{x}, \vec{y})$ Symétrie centrale en $O$
Coordonnées	$x_{G_1} = z_{G_1} = 0$ $y_{G_1} < 0$	$z_{G_2} = y_{G_2} = 0$ $x_{G_2} > 0$	$x_{G_3} = y_{G_3} = z_{G_3} = 0$	$x_{G_4} = y_{G_4} = z_{G_4} = 0$
Matrice d'inertie	$\begin{bmatrix} A_{G_1 M_1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{G_1 M_1} & 0 \\ 0 & 0 & C_{G_1 M_1} \end{bmatrix}_{G_1}$	$\begin{bmatrix} A_{G_2 M_2} & 0 & 0 \\ 0 & B_{G_2 M_2} & 0 \\ 0 & 0 & C_{G_2 M_2} \end{bmatrix}_{G_2}$	$\begin{bmatrix} A_{G_3 M_3} & 0 & 0 \\ 0 & B_{G_3 M_3} & 0 \\ 0 & 0 & C_{G_3 M_3} \end{bmatrix}_{G_3}$	$\begin{bmatrix} A_{G_4 M_4} & -F_{G_4 M_4} & 0 \\ -F_{G_4 M_4} & B_{G_4 M_4} & 0 \\ 0 & 0 & C_{G_4 M_4} \end{bmatrix}_{G_4}$

**Q.3.** Sans calcul, quels sont les modèles qui auront le même moment d'inertie autour de  $(O, \vec{x})$  et ceux qui auront un moment d'inertie différent.

Suivant  $(O, \vec{x})$  les moments d'inertie de tous les modèles doivent être identiques ; malgré les formes différentes, la répartition de la masse par rapport à l'axe est la même.

**Q.4.** Sans calcul, anticiper le fonctionnement de chacun des modèles de yoyo et ce qui risque de gêner le bon fonctionnement.

- Modèle 1 : Le centre d'inertie est décalé par rapport à l'axe de rotation, agit comme un balourd.
- Modèle 2 : Le centre d'inertie est décalé suivant l'axe de rotation, le fil va frotter.
- Modèle 3 : Pas de produit d'inertie, centre d'inertie au centre, un bon yoyo.
- Modèle 4 : Produit d'inertie (termes hors diagonaux) il va y avoir des vibrations.





**Q.5.** Déterminer à quel modèle correspond chaque propriété massique. Vérifier la cohérence de vos réponses par rapport aux réponses précédentes.

Modèle	Propriété numérique
1	3
2	1
3	2
4	4

**Q.6.** Vérifier la cohérence de la valeur du moment d'inertie du modèle 3 autour de l'axe  $(O, \vec{x})$ .

On considère un cylindre de  $D = 50\text{mm}$ . Le moment d'inertie d'un tel cylindre est alors  $A = \frac{MR^2}{2} = \frac{0,062 \cdot 25^2}{2} = 19,3\text{kg} \cdot \text{mm}^2$ . La simulation numérique donne  $18,9\text{kg} \cdot \text{mm}^2$ . La différence est due aux chaudières et à l'axe du yoyo qui changent légèrement la répartition des masses ; le volume est identique mais pas la masse, donc la masse volumique entre la théorie et la simulation est légèrement différente.

**Q.7.** Pourquoi le moment d'inertie autour de l'axe  $(O, \vec{x})$  d'un modèle est-il différent de celui des autres modèles ? Retrouver cette valeur par le calcul.

Pour le modèle 1 (propriétés 3), le centre d'inertie est déplacé de  $-5,15\text{mm}$  suivant  $\vec{y}$ , donc le centre d'inertie n'est pas sur l'axe  $(O, \vec{x})$ . Pour retrouver les autres valeurs, il suffit de calculer ce moment d'inertie en  $O$  à l'aide du théorème de Huygens :

$$A_{OM_1} = A_{G_1M_1} + y_{G_1}^2 M = 17,3 + (-5,15)^2 \cdot 62 \cdot 10^{-3} = 18,9\text{kg} \cdot \text{mm}^2$$

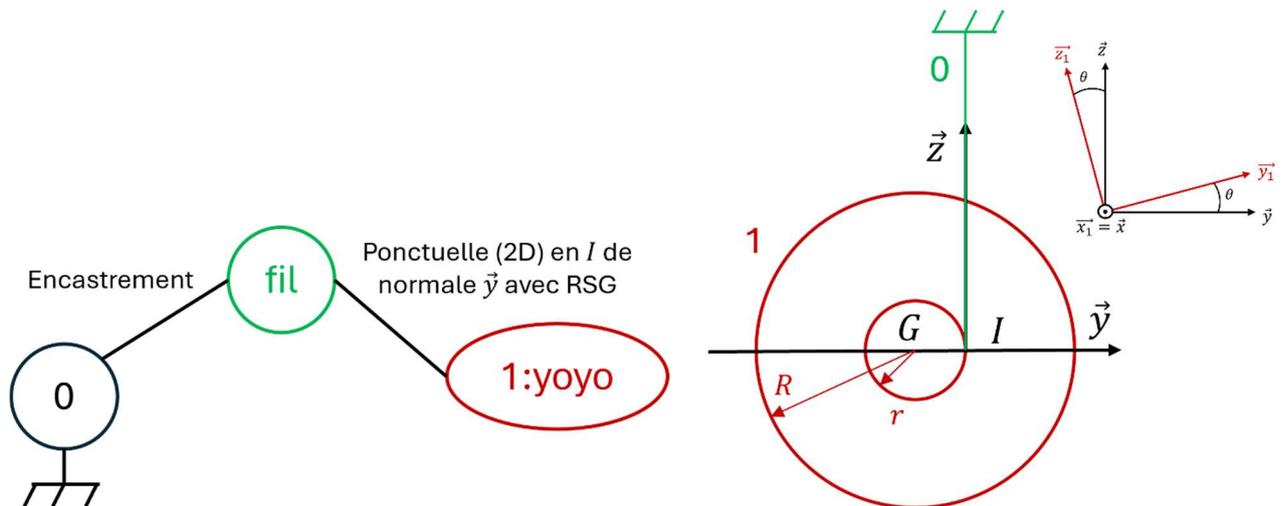
Ce qui correspond bien à la valeur du moment d'inertie des autres modèles, ce qui traduit le fait que la masse soit répartie de la même manière pour tous les modèles.

## 1. Analyse théorique

On considère que le yoyo du modèle 3 est attaché à un fil enroulé sur l'axe intérieur du yoyo. On le lâche et on le laisse tomber, la main reste donc fixe dans le repère monde  $R_0 = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . La masse ainsi que l'enroulement du fil sont négligés. Le roulement entre le fil  $0$  et le yoyo  $1$  se fait sans glissement.

On se questionne sur l'équation du mouvement d'un tel yoyo.

**Q.8.** Réaliser le graphe de structure et un schéma de principe avec  $(O, \vec{z})$  ascendant,  $(O, \vec{y})$  vers la droite,  $I$  point de contact entre le fil et le cylindre intérieur. On note  $\vec{IG} = -r\vec{y}$  et  $(\vec{y}, \vec{y}_1) = \theta\vec{x}$ . On considère le problème plan (par symétrie  $(G, \vec{y}, \vec{z})$ ).



**Q.9.** Déterminer l'expression du torseur des actions mécaniques transmissibles du fil sur le yoyo 1 ainsi que le torseur cinématique du yoyo par rapport au bâti 0.

Comme il a roulement sans glissement, la liaison ponctuelle admet des frottements :

$$\{F_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} - & 0 \\ N_{fil} & - \\ T_{fil} & - \end{Bmatrix}_{I, B_0} \quad \text{avec } T_{fil} = f \cdot N_{fil} \text{ où } f \text{ est le coefficient de frottement}$$

$$\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} & - \\ - & 0 \\ - & 0 \end{Bmatrix}_{I, B_0} \quad \text{car il y a RSG en } I \quad (\overline{V}_{I \in 1/0} = \vec{0}).$$

### 1.1. Équation du mouvement par le PFD

**Q.10.** A partir du principe fondamental dynamique, déterminer l'équation du mouvement du modèle 3 en prenant  $A_{G_3 M_3} = \frac{MR^2}{2}$ .

Avec une démarche « naïve » :

On cherche l'équation de mouvement d'un système en rotation, nous allons utiliser le théorème du moment dynamique (TMD).

Nous isolons 1 et nous supposons le référentiel Galiléen. D'après le théorème du moment dynamique en G :

$$\overline{\delta}_{G,1/0} = \overline{M}_{G,ext \rightarrow 1}$$

**BAME** : le poids avec  $\overline{M}_{G,poids \rightarrow 1} = \vec{0}$  et le fil avec  $\overline{M}_{G,fil \rightarrow 1} = \overline{M}_{I,fil \rightarrow 1} + \overline{GI} \wedge (T_{fil} \vec{z} + N_{fil} \vec{y})$

soit  $\overline{M}_{G,fil \rightarrow 1} = r \vec{y} \wedge T_{fil} \vec{z} = r T_{fil} \vec{x}$ .

Et  $\overline{\delta}_{G,1/0} = \left[ \frac{d\sigma_{G,1/0}}{dt} \right]_{R_0} = \frac{MR^2 \ddot{\theta}}{2} \vec{x}$ . Il vient alors  $\frac{MR^2 \ddot{\theta}}{2} = r T_{fil}$ .

Il faut alors déterminer  $T_{fil}$ . Pour cela nous allons utiliser le théorème de la résultante dynamique en I suivant  $\vec{z}$  :

$$M \overline{\Gamma}_{G \in 1/0} \cdot \vec{z} = -Mg + T_{fil} \text{ soit } T_{fil} = M(\overline{\Gamma}_{G \in 1/0} \cdot \vec{z} + g). \text{ Déterminons } \overline{\Gamma}_{G \in 1/0} :$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{G \in 1/0}} = \left[ \frac{d\overrightarrow{V_{G,1/0}}}{dt} \right]_{R_0}, \text{ or } \overrightarrow{V_{G,1/0}} = \overrightarrow{V_{I,1/0}} + \overrightarrow{GI} \wedge \dot{\theta} \vec{x} = -r\dot{\theta} \vec{z} \text{ d'où } \overrightarrow{\Gamma_{G \in 1/0}} = -r\ddot{\theta} \vec{z}.$$

$$\text{Finalement } T_{fil} = M(g - r\ddot{\theta})$$

$$\text{On en déduit : } \frac{MR^2\ddot{\theta}}{2} = rM(g - r\ddot{\theta}) \text{ soit } \ddot{\theta} = \frac{2gr}{R^2 + 2r^2}.$$

## 1.2. Équation du mouvement par le TEC

**Q.11.** En utilisant le théorème de l'énergie cinétique (ou théorème de l'énergie – puissance), déterminer l'équation du mouvement du modèle 3 en prenant  $A_{G_3M_3} = \frac{MR^2}{2}$ .

Pour le modèle 3 :

$$I_{G_3, M_3} = \begin{bmatrix} A_{G_3M_3} & 0 & 0 \\ 0 & B_{G_3M_3} & 0 \\ 0 & 0 & C_{G_3M_3} \end{bmatrix}_{G_3}$$

$$\text{L'énergie cinétique est } E_c = \frac{1}{2} M \overrightarrow{V_{I, M_3/0}} \cdot \overrightarrow{V_{I, M_3/0}} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega_{M_3/0}} \cdot A_{I, M_3} \overrightarrow{\Omega_{M_3/0}} = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 A_{I, M_3}$$

$$\text{Le théorème de Huygens donne } A_{I, M_3} = \frac{MR^2}{2} + Mr^2 \text{ d'où } E_c = \frac{1}{4} M \dot{\theta}^2 (R^2 + 2r^2)$$

Pour la puissance :  $T_{fil}$  ne travaille pas ( $\overrightarrow{V_{I \in M_3/0}} = \vec{0}$ )

$$P_{g \rightarrow M_3} = \left\{ \begin{matrix} -Mg\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_3} \otimes \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta} \vec{x} \\ -r\dot{\theta} \vec{z} \end{matrix} \right\}_{G_3} = Mgr\dot{\theta}$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique (TEC) :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum P_{ext \rightarrow M_3/0} \text{ soit } \frac{1}{2} M \dot{\theta} \ddot{\theta} (R^2 + 2r^2) = Mgr\dot{\theta}$$

$$\text{On en déduit } \ddot{\theta} = \frac{2gr}{R^2 + 2r^2}.$$

**Q.12.** Faire l'application numérique. La simulation numérique donne  $\ddot{\theta} = 172 \text{ rad. s}^{-2}$ .

$$\text{On a } \ddot{\theta} = \frac{2 \times 9,81 \times 6.10^{-3}}{25.10^{-6} + 2 \times 6.10^{-6}} = 169 \text{ rad. s}^{-2}, \text{ ce qui est très proche de la simulation numérique.}$$

**Q.13.** Les équations de mouvements des autres modèles seront-elles différentes ? Justifier sans calcul.

- Modèle 1 : Le centre d'inertie est décalé par rapport à l'axe de rotation, l'équation du mouvement sera différente.
- Modèle 2 : Le centre d'inertie est décalé par rapport au point I, l'équation du mouvement sera différente.
- Modèle 4 : La matrice d'inertie est différente, l'équation du mouvement sera différente.