Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 12 : 9 au 13 décembre 2024

Pensez à revoir régulièrement :

- les développements limités usuels ;
- les propriétés des fonctions usuelles (dérivées, allure des courbes,...) ;
- les primitives usuelles.

Questions de cours

- ☐ Comme d'habitude, savoir citer toute définition, toute proposition du cours.
- ☐ On pose, pour tout $x > 1$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $x > 1$, l'intégrale $\Gamma(x)$ converge.
- ☐ Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
- ☐ Déterminer la nature de $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x$.
- ☐ Étudier l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{(e^t-1)^2}$ sur $]0,1]$. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{(e^t-1)^2}\mathrm{d}t$ quand $x \to 0^+$.
- ☐ Montrer que $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ n'est pas intégrable.
- ☐ Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.
- ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $f_n : x \mapsto x^n(1-x)$ sur $[0,1]$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f que l'on déterminera.

Chapitre 13 : Intégrales sur un intervalle quelconque

I Intégrales sur $[a, +\infty[$

I.1 Intégrale convergente en $+\infty$

- fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$.
- intégrale $\int_a^{+\infty} f$ convergente, divergente.
- linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
- lorsque $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f$ tend vers $\int_a^{+\infty} f$ (par définition) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} f$ tend vers 0. Analogie avec somme partielle et reste d'une série convergente.
- dérivabilité de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ pour une fonction f continue sur $[a, +\infty[$.
- pour une fonction continue par morceaux <u>positive</u> sur $[a, +\infty[$, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.

- si f et g sont continues par morceaux, positives et si $f \leqslant g$, alors la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.
- exemples de comparaison série-intégrale.
- différence avec les séries : si $\int_a^{+\infty} f$ converge, cela n'implique pas que f tend vers 0 en $+\infty$. Étude d'un contre-exemple.

I.2 Intégrales de référence

- intégrales de Riemann : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

I.3 Fonctions intégrables sur $[a, +\infty[$

- f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si $\int_a^{+\infty} |f|$ converge. On dit de manière équivalente que $\int_a^{+\infty} |f|$ converge absolument. Espace vectoriel $L^1([a, +\infty[, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur $[a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- si $b \in]a, +\infty[$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si f est intégrable sur $[b, +\infty[$. Cela justifie qu'on puisse dire « f est intégrable en $+\infty$ » au lieu de « f est intégrable sur $[a, +\infty[$ ».
- si $f \in L^1([a, +\infty[, \mathbb{K})$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge. La réciproque est fausse.

I.4 Théorèmes de comparaison

- si $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} O\Big(g(x)\Big)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f. Cas particulier : $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} o\Big(g(x)\Big)$.
- si $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ équivaut à celle de f.

II Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

<u>Méthode générale</u>. On commence par étudier la continuité de f sur l'intervalle sur lequel on intègre. Puis, en chaque point de discontinuité, y compris aux bornes de l'intégrale, on se demande si f est prolongeable par continuité. Si ce n'est pas le cas, on mène une étude de convergence en ce point. On mène également une étude de convergence aux éventuelles bornes infinies de l'intégrale.

II.1 Intégrale convergente et fonctions intégrables

- intégrale convergente : définition sur un intervalle de type $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$, où a et b sont finis ou infinis.
- pour étudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f$, on n'étudie jamais les deux bornes en même temps, mais l'une après l'autre. Contre-exemple de $\int_{-x}^{x} t \mathrm{d}t$.
- fonction intégrable sur I. Notation $L^1(I, \mathbb{K})$.
- Si $f \in L^1(I, \mathbb{K})$, alors $\int_I f$ converge. Inégalité triangulaire.

II.2 Intégrales de référence

- intégrales de Riemann : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- f intégrable en a si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ intégrable en 0. Les intégrales $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\mathrm{d}x$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$.

II.3 Propriétés des intégrales généralisées

- linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles, critère de nullité.
- adaptation des théorèmes de comparaison vus en partie I.4.

II.4 Intégration des relations de comparaison

- cas intégrable (et de signe constant) : comparaison des restes.
- cas non intégrable (et de signe constant) : comparaison des intégrales partielles.

III Intégration par parties et changement de variable

III.1 Intégration par parties

- intégration par parties sur un intervalle quelconque.
- la convergence du crochet $[fg]_a^b$ assure que les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature.
- pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
- intégrales de Wallis (vues en TD).

III.2 Changement de variable

- théorème de changement de variable : le changement de variable doit être bijectif, de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone.
- pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

Chapitre 14 : Suites de fonctions

Cette semaine, ce chapitre ne concerne que la question de cours.

Soient E et F des espaces vectoriels normés de dimension finie. Les fonctions sont définies sur une partie A de E et à valeurs dans F (en pratique, F sera très souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

I Modes de convergence

I.1 Convergence simple

- convergence simple d'une suite de fonctions (f_n).
- on constate que la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement continue.

I.2 Convergence uniforme

- convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n). Pour des fonctions bornées, convergence en norme $\|\cdot\|_\infty$.
- dessin illustrant la convergence uniforme (pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
- si (f_n) converge uniformément vers f, alors (f_n) converge simplement vers f. La réciproque est fausse.
- méthode pour montrer la convergence uniforme de (f_n) : on recherche d'abord une fonction candidate f pour être la limite via une convergence simple, puis on cherche à obtenir pour tous x et n, une inégalité $\|f_n(x) - f(x)\|_F \leqslant M_n$, où M_n ne dépend pas de x et tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

À suivre la semaine prochaine :

Suites de fonctions.
Séries de fonctions.