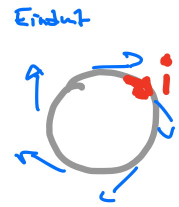
Révisions Induction

Préambule : φ d'induction lorsque :
- un circuit fixe dans un champ $\vec{B}$ variable
- un circuit mobile dans un champ $\vec{B}$ constant

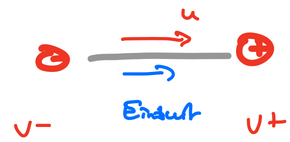
point commun : le flux de $\vec{B}$ au travers du circuit varie.

le φ d'induction se manifeste par un champ $\vec{E}$ induit



2 possibilités : circuit fermé $\Rightarrow$ courant induit

circuit ouvert $\Rightarrow$ tension aux bornes du circuit

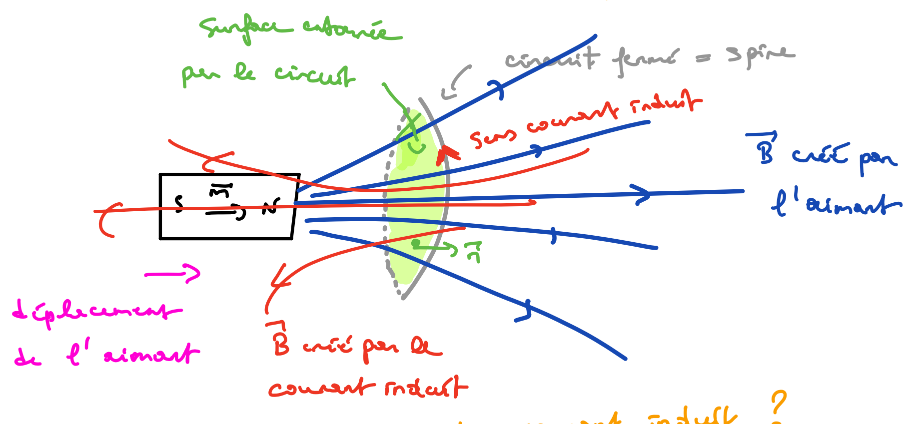


$V+ > V-$

loi de Lenz : loi qualitative (permet de trouver le sens du courant induit)

" le courant induit s'oppose par ses effets à la cause du φ d'induction " $\Rightarrow$ en g^{al}, le + simple est de raisonner avec le flux.

exemple :



sens du courant induit ?

On note $\phi = \phi(\vec{B}/S)$ — $\vec{B}$: champ créé par l'aimant ; S : surface entourée par le circuit

Avec la convention pour $\vec{n}$, $\phi > 0$

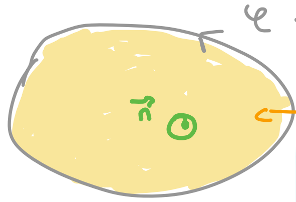
Donc le déplacement $\rightarrow$ de l'aimant $\nearrow$ le flux (un $\vec{B}$ est d'autant + intense que l'on est proche de l'aimant) : $\phi \nearrow$

le courant induit doit donc diminuer ce flux, i.e. créer un flux négatif $\Rightarrow$ champ $\vec{B}$ (créé par le courant induit) vers la gauche $\Rightarrow$ d'où le sens de i dans le circuit (convention tire-bouchon ...)

Loi de Faraday

→ loi quantitative, permet de calculer la fém (et ensuite le courant induit)

→ ne fonctionne que sur une courbe (circuit) fermée



$\mathcal{C}$: courbe (fermée) orientée

surface S (entourée par $\mathcal{C}$) orientée

⚠ les orientations de la courbe et de la surface doivent être cohérentes ! (tire-bouchon)

Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

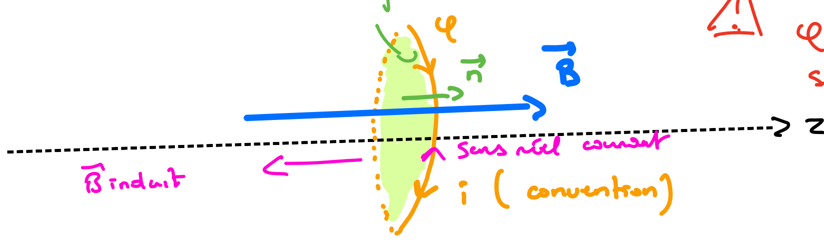
où $\phi = \phi(\vec B / S)$

e (fém) est la circulation de $\vec E_{induit}$ le long de $\mathcal{C}$.

Q1 : Spire immobile soumise à $\vec B$ variable uniforme : $\vec B = (B_0 + a t)\,\vec{e_z}$ (B_0 et a positifs)
On note R la résistance de la spire. Calculer i induit.

On a trouvé $i < 0$

confirmation avec Lenz :

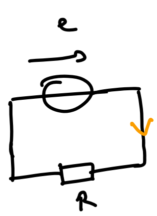


⚠ il est conseillé d'orienter $\mathcal{C}$ et i dans le même sens.

$$\Phi = \iint_S \vec B \cdot \vec n \, dS = BS$$

soit $\phi = (B_0 + at)S$, et donc $e = -\frac{d\phi}{dt} = -aS$

Pour en déduire i, il faut représenter le circuit électrique équivalent : Que modélise-t-on ?
→ le $\mathcal{C}$ d'induction par une source (idéale) de tension.
→ la résistance de la spire.



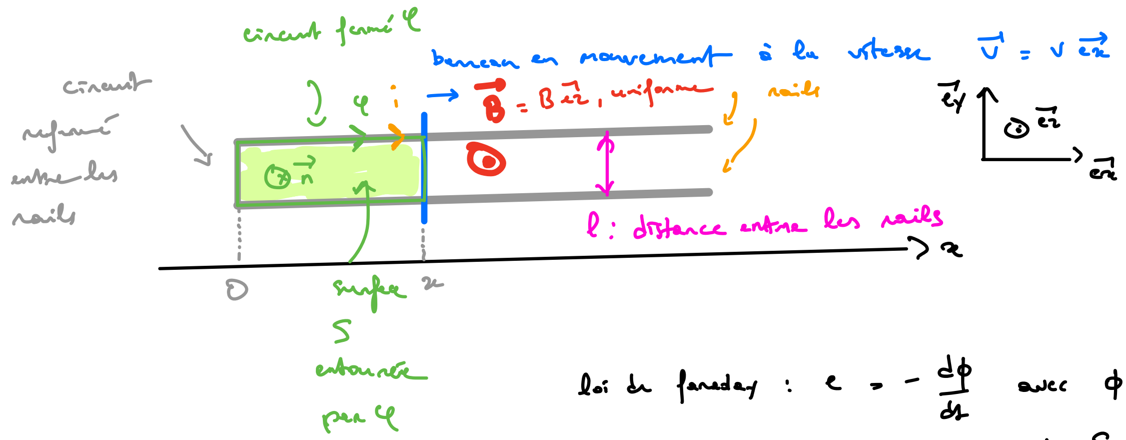
⚠ e est orienté dans le même sens que $\mathcal{C}$ ⇒ si $\mathcal{C}$ et i dans le m sens, e et i aussi.

conclusion (loi des mailles) :

$e - Ri = 0 \Rightarrow i = e/R$

finalement, $\boxed{i = -\frac{aS}{R}}$ $\quad i < 0$

Q2 : Rails de Laplace - fém et courant induits



Le barreau est lui même conducteur

On note R (supposée constante) la résistance du circuit fermé $\mathcal{C}$

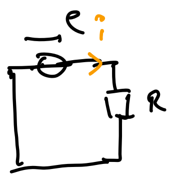
Loi de Faraday : $e = -\dfrac{d\phi}{dt}$ avec $\phi = -BS$

et $S = \ell x$

$$\Rightarrow e = -\frac{d}{dt}(-B\ell x) = B\ell \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=v}$$

d'où $e = B\ell v$

circuit électrique équivalent :



donc $i = e/R$

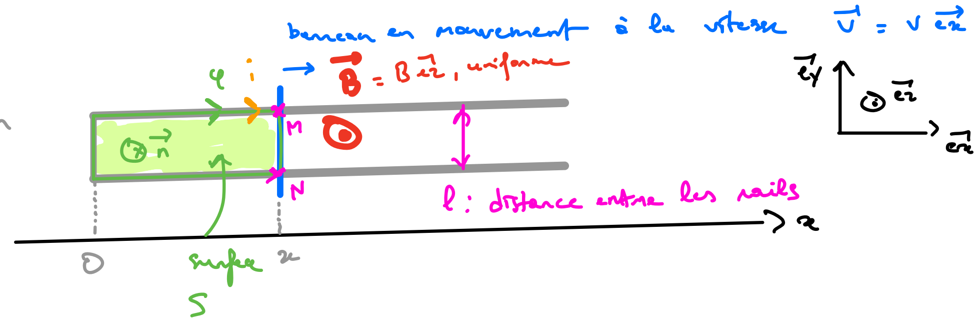
et donc $i = \dfrac{B\ell v}{R}$

Ainsi, avec un déplacement vers la droite, $v > 0$ et donc $i > 0$

Cohérent avec Lenz : on veut $\otimes \vec{B}$ induit, or sens avec $\circlearrowleft i$

Q3 : Rails de Laplace - force de Laplace, freinage em

On reprend la même situation que Q2 (mêmes notations)



On considère les rails de Laplace ds un plan horizontal. Le barreau glisse sans frottements sur les rails (en fait il roule...)

bilan des forces (sur le barreau mobile) :
- poids
- réact. normale

} se compensent

- force de Laplace

Calcul de Flaplace : $\vec{F}_{lap} = i\,\vec{MN}\wedge\vec{B}$ (cas simple car $\vec{B}$ uniforme)

$$= i\,(-\ell\,\vec{e_y})\wedge B\,\vec{e_z}$$

$$= -i\ell B\,\vec{e_x} \quad \text{et} \quad i = \frac{B\ell v}{R} \Rightarrow \underbrace{\vec{F}_{lap} = -\frac{(\ell B)^2}{R}\,v\,\vec{e_x}}$$

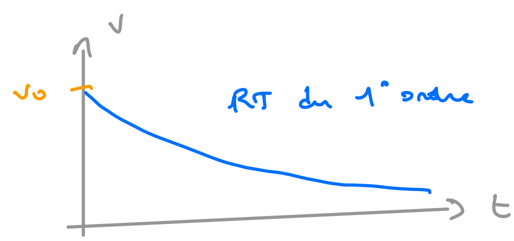
force "de frottement fluide" ⇒ freinage électromagnétique.

PFD appliqué au barreau : $m\vec{a} = \underbrace{\vec{P} + \vec{R_N}}_{\vec{0}} + \vec{F}_{lap}$

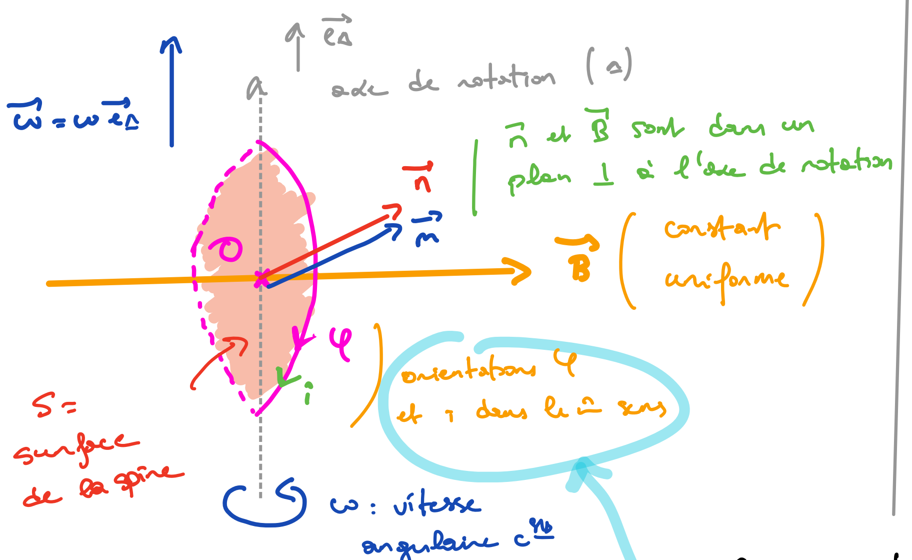
$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\,\vec{e_x}$

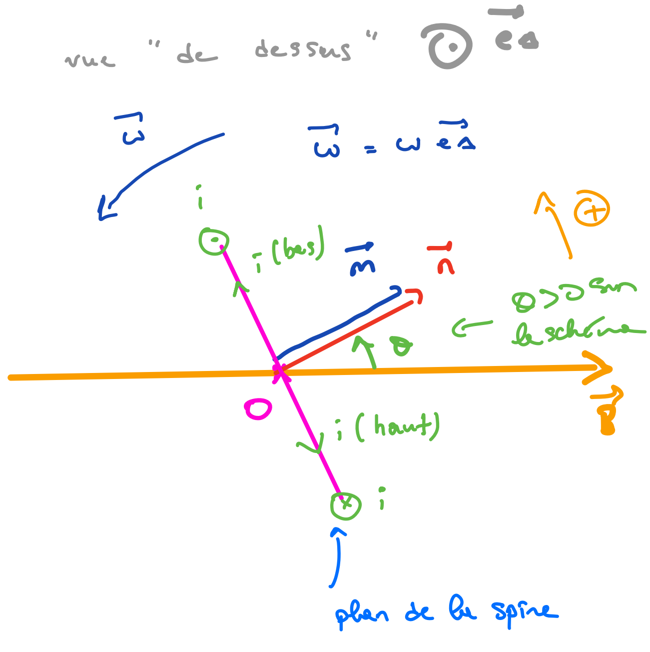
On projette sur (Ox) : $m\frac{dv}{dt} = -\frac{(\ell B)^2}{R}\,v$ soit $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = 0$

avec $\boxed{\tau = \frac{mR}{(B\ell)^2}}$ Solution : $v = v_0\,e^{-t/\tau}$



Q4 Spire en rotation





- calcul de la fém : $\Phi = \vec{B}\cdot\vec{n}\,S$ | hypothèses : S plane, $\vec{B}$ uniforme

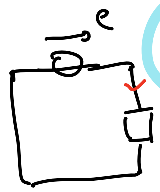
D'où $\Phi = BS\cos\theta$

loi de Faraday : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\sin\theta\,\omega$ $\left(\frac{d\cos\theta}{dt} = \underbrace{\frac{d\cos\theta}{d\theta}}_{-\sin\theta} \times \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} \right)$

Rem : la fém est proportionnelle à la vitesse angulaire !

- circuit électrique équivalent :

on modélise le φ de induction (source de tension) et la résistance R de la spire



e et i dans le même sens

loi de maille $\Rightarrow i = \frac{e}{R}$

donc $\boxed{i = \frac{BS\omega}{R}\sin(\omega t)}$

$\theta = \omega t$

Rem : on obtient un courant (et tension) sinusoïdal $\Rightarrow$ principe de l'alternateur

- couple résistant :

$\vec{C} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{m} = i S \vec{n}$ (def moment magnétique)

$\Rightarrow \vec{C} = i S \underbrace{\vec{n} \wedge \vec{B}}_{-B\sin\theta\,\vec{e_a}} = \underbrace{\frac{BS\omega\sin\theta}{R}}_{i} . S\,(-B\sin\theta\,\vec{e_a})$

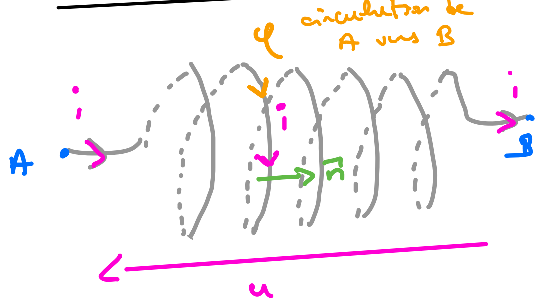
D'où $\vec{C} = -\frac{(BS\sin\theta)^2}{R}\underbrace{\omega\,\vec{e_a}}_{\vec{\omega}}$ soit $\boxed{\vec{C} = -\frac{(BS\sin\theta)^2}{R}\vec{\omega}}$

coeff positif

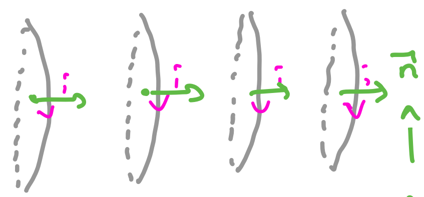
couple résistant (s'oppose à la rotation), proportionnel à la vitesse angulaire

(analogue à la force de frottement fluide)

Q5 Inductance propre, auto-induction



on modélise usuellement l'enroulement hélicoïdal $\Longleftrightarrow$ par un ensemble de spires planes



normal à la spire, orienté par i

On utilise
$$\begin{cases} e = -\frac{d\phi}{dt} & \text{: loi de Faraday} \\ \phi = L i & \text{: déf de l'auto-inductance } L \end{cases}$$

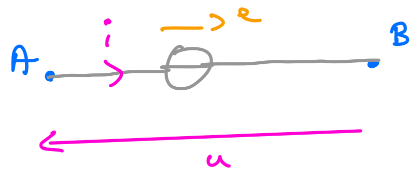
loi de Faraday $\Rightarrow$ cohérence entre φ et $\vec{n}$

déf de l'auto-inductance L $\Rightarrow$ cohérence entre $\vec{n}$ et i

D'où $e = -\frac{d}{dt}(Li) = -L\frac{di}{dt}$

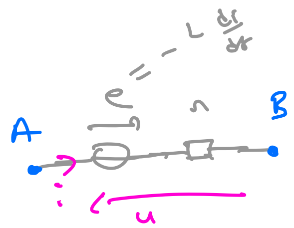
or (schéma), $u = -e$ et donc $\boxed{u = L\frac{di}{dt}}$

circuit électrique équivalent : (on néglige la résistance interne de la bobine)



convention récepteur

on retrouve la relation entre u et i pour une bobine (sans résistance), c'est basé sur la φ d'induction

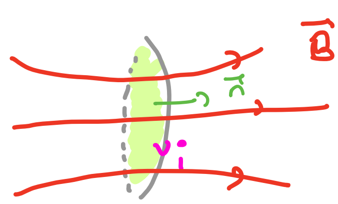


Rem : si on prend en compte la résistance interne :

$$u = L\frac{di}{dt} + ri$$

Rem : On parle d'auto induction pour la loi $u = L\frac{di}{dt}$ et d'inductance propre pour le coeff. L parce que le flux (et donc la φ d'induction) sont dûs au champ $\vec{B}$ créé par la bobine elle même.

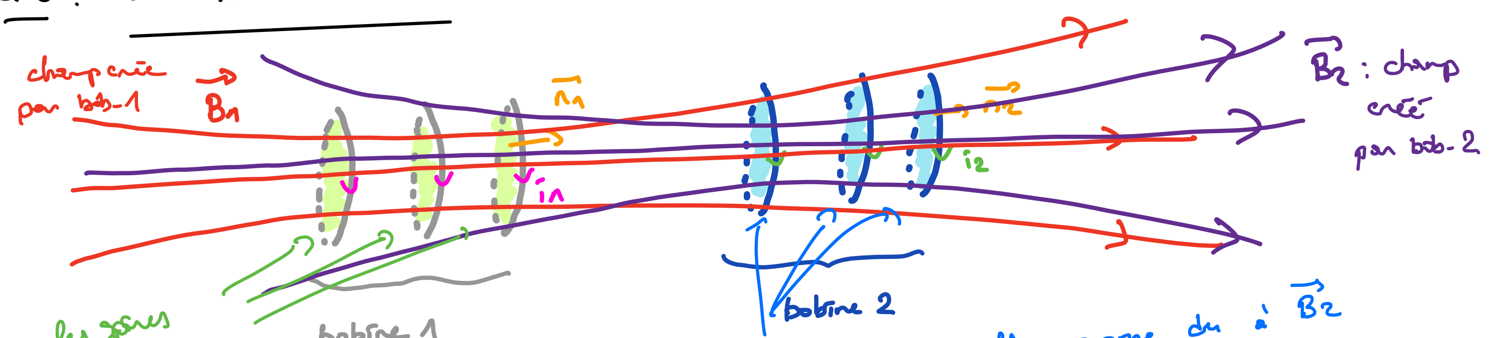
illustration avec 1 spire :



ϕ = flux de $\vec{B}$ au travers de la spire (flux propre)

↳ renvoie à soi même (self en anglais)

Q6 : Inductance mutuelle → 2 bobines en interaction



les spires de bob1 sont traversées par $\vec{B}_1$ (flux propre) et par $\vec{B}_2$ (flux extérieur)

spires de bob2 : flux propre dû à $\vec{B}_2$
flux extérieur dû à $\vec{B}_1$

flux total / bob 1 — flux propre — flux extérieur

On note : $\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$

$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22}$ → flux propre

flux tot. — flux ext.

Or, le flux est toujours proportionnel au champ $\vec{B}$, lui même proportionnel au courant ⇒ Φ proportionnel à i.

On obtient donc $\Phi_{11} = L_1 i_1$ $\quad \Phi_{12} = M i_2$

$\Phi_{21} = M i_1$ $\quad \Phi_{22} = L_2 i_2$

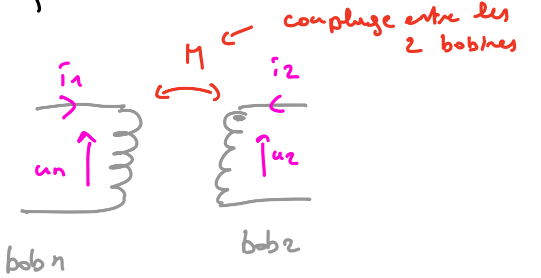
L_1 et L_2 sont les inductances propres

M est l'inductance mutuelle (traduit à quel point le champ créé par la bobine 1 traverse la bobine 2, et inversement)

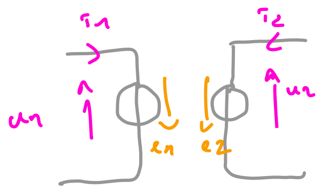
⚠ à priori, M_{12} et M_{21} pourraient être ≠, on montre qu'ils sont égaux

finalement, $\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$ et $\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$

Mise en équation de 2 circuits couplés par inductance mutuelle :



⇕ circuit élec. équivalent (on ne modélise que les φ d'induction)



$u_1 = -e_1$

Or, $e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}$ (Faraday)

et $\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$

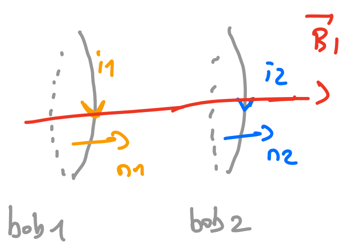
⇒ $e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$

et donc $\boxed{u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}}$

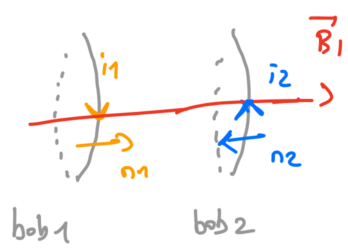
de même : $\boxed{u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}}$

Rem : si $M = 0$ (pas de couplage, les bobines n'ont pas d'influence l'une sur l'autre), on retrouve $u = L \frac{di}{dt}$ pour chaque bobine).

Rem : On écrit toujours les lois ainsi, l'orientation relative des bobines est contenue dans le signe de M.



$M > 0$



$M > 0$