

DS5 - Correction

Problème 1

1. Tout plan orthogonal à (Oz) est plan de symétrie

$\Rightarrow \vec{B}$ est selon $\vec{e}_z$

Invariances par translation $(\vec{e}_z)$ et rotation autour de (Oz)

$\Rightarrow B$ ne dépend ni de z ni de θ .

Donc $\vec{B}_1 = B_1(r) \vec{e}_z$

$$2. \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_1(r) h - B_{ext} h = B_1(r) h \quad \text{car } B_{ext} = 0$$

$$\text{Le th d'Ampère donne } \oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_e$$

$$\text{avec } I_e = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\alpha r \vec{u}_\theta) \cdot (dr dz \vec{u}_\theta)$$

$$= \alpha \iint_S r dr dz$$

$$= \alpha \int_0^h dz \int_0^a r dr = \alpha h \left(\frac{a^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right)$$

$$D'où \quad B_1(r) \cancel{h} = \mu_0 \frac{\alpha}{2} \cancel{h} (a^2 - r^2)$$

$$\text{Et donc } \boxed{B_1(r) = \frac{\mu_0 \alpha}{2} (a^2 - r^2)}$$

3. $\vec{B}$ doit vérifier $\text{div}(\vec{B}) = 0$ et $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Mais on est en RS (j_s est constant) donc $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$, et
comme les courants sont en surface, $\vec{j} = \vec{0}$ à l'intérieur du cylindre,

et donc $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \vec{0}$.

$$\text{Avec } \vec{B} = B_0 \vec{u}_z, \quad \text{div}(\vec{B}) = \frac{\partial B_0}{\partial z} \quad \text{et} \quad \vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \frac{1}{r} \frac{\partial B_0}{\partial r} \vec{u}_\theta - \frac{\partial B_0}{\partial r} \vec{u}_\theta$$

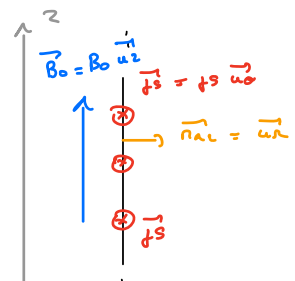
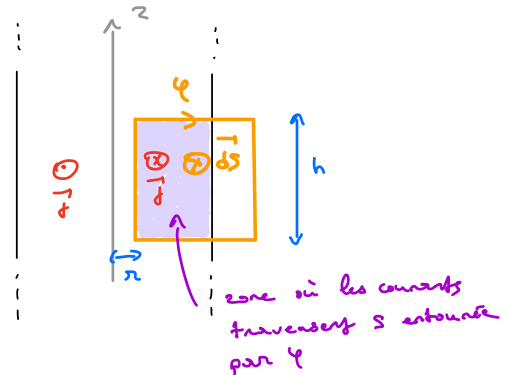
Et comme $B_0 = \text{cte}$, on a bien $\text{div}(\vec{B}) = 0$ et $\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \vec{0}$.

4. On prend comme milieu 1 l'intérieur du solénoïde

et comme milieu 2 l'extérieur: $B_1 = B_0$ et $B_2 = \vec{0}$

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$$

$$\text{Donc } \vec{u}_z \wedge (\vec{0} - B_0 \vec{u}_z) = \mu_0 j_s \vec{u}_\theta$$



Soit $B_0 \vec{u}_0 = \mu_0 \oint \vec{u}_0$

Et donc $B_0 = \mu_0 \oint s$

5.

$H \begin{matrix} \uparrow \oplus \\ \oplus \\ \downarrow \ominus \end{matrix} N \text{ spins}$ $\oint s H = N i$ donc $\oint s = \frac{N i}{H}$

6. En reprenant ce qui précède :

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 N i}{H} \vec{e}_z$$

On peut aussi repenser du H d'Ampère avec des courants $\oint$ uniformes

7. $i = \text{Im} \cos(\omega t)$ donc $B_0 = \frac{\mu_0 N}{H} \text{Im} \cos(\omega t)$

En posant $B_0 = k \text{Im} \cos(\omega t)$, on obtient $k = \frac{\mu_0 N}{H}$

8. $\vec{E}_n = E_n \vec{u}_0$

donc $\vec{\text{rot}}(\vec{E}_n) = - \frac{\partial E_n}{\partial t} \vec{u}_n + \frac{1}{n} \frac{\partial(n E_n)}{\partial n} \vec{u}_z$

mais E_n ne dépend pas de z , donc $\frac{\partial E_n}{\partial z} = 0$

et il reste $\vec{\text{rot}}(\vec{E}_n) = \frac{1}{n} \frac{\partial(n E_n)}{\partial n} \vec{u}_z$

On utilise $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, ce qui donne $\frac{1}{n} \frac{\partial(n E_n)}{\partial n} \vec{u}_z = - k \text{Im} \omega (-\sin(\omega t)) \vec{u}_z$

Soit $\frac{\partial(n E_n)}{\partial n} = n k \text{Im} \omega \sin(\omega t)$

donc $n E_n = \frac{n^2}{2} k \text{Im} \omega \sin(\omega t) + c^{\text{te}}$ en intégrant

et donc $E_n = \frac{n k \text{Im} \omega \sin(\omega t)}{2} + \frac{c^{\text{te}}}{n}$

$c^{\text{te}} = 0$ sinon $E_n \rightarrow \infty$ pour $n \rightarrow 0$

finalement, $E_n = \frac{n k \text{Im} \omega \sin(\omega t)}{2}$

9. $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, donc $\vec{j}_n = \sigma \vec{E}_n$, d'où

$$\vec{j}_n = \sigma \frac{n k \text{Im} \omega \sin(\omega t)}{2} \vec{u}_0$$

10. $P_v = \vec{j}_n \cdot \vec{E}_n$ donc $P_v = \sigma \frac{n^2 k^2 \text{Im}^2 \omega^2}{4} \sin^2(\omega t)$

11. Il faut sommer sur tout le volume :

$P = \iiint_V P_v dV$ avec $dV = r dr d\theta dz$

Donc $P = \frac{\sigma k^2 \text{Im}^2 \omega^2}{4} \sin^2(\omega t) \underbrace{\int_0^a r^3 dr}_{a^4/4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^H dz}_H$

Soit $P = r k^2 \frac{\sin^2 \omega^2}{4} \sin^2(\omega t) \frac{a^4}{4} \cdot 2\pi \cdot H$

finalement : $P = \frac{8 k^2 \sin^2 \omega^2 \pi a^4 H}{8} \sin^2(\omega t)$

12. $\langle P \rangle = \frac{8 k^2 \sin^2 \omega^2 \pi a^4 H}{16}$ car $\langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2$
 $V = \pi a^2 H$, donc $\langle P \rangle = \frac{8 k^2 \sin^2 \omega^2 a^2 V}{16}$

13. Notons P_{fus} la puissance réellement utilisée pour la fusion.

Compte-tenu des pertes, il faut $\langle P \rangle = 1,15 P_{fus}$

Il faut faire fondre $m = 80 \text{ kg}$ de matériau avec $\Delta_{fus} = 350 \text{ kJ/kg}$,

il faut donc fournir une énergie $E_{fus} = m \Delta_{fus}$, et $E_{fus} = P_{fus} t_{fus}$

Ainsi, $t_{fus} = \frac{m \Delta_{fus}}{\frac{\langle P \rangle}{1,15}} = \frac{1,15 m \Delta_{fus}}{\langle P \rangle}$ avec $\langle P \rangle$ calculé précédemment.

A-N : $t_{fus} = \frac{1,15 \times 80 \times 3,5 \cdot 10^5 \times 16}{1,6 \cdot 10^6 \times 150^2 \times (9,8 \times 10^0)^2 \times (0,15)^2 \times 0,03 \times (10^{-5})^2}$

on trouve $t_{fus} = 3005 \text{ (6 mm.)}$