DS 5 . Correction

Problème 2

1. Pour avoir un phénomène d'induction, il faut :

   → un champ $\vec{B}$ variable

   → un circuit en mouvement

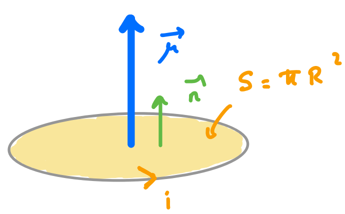
   On n'a ici ni $\vec{B}$ variable ni mouvement, donc pas d'induction à priori.

3. Conducteur parfait : conductivité infinie

   $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ donc $\vec{E} = \vec{0}$ (sinon $\vec{j}$ infini)

4. $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, et $\vec{E} = \vec{0}$ donc $\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{0}$, d'où $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = c^{ste}$

5.



$\vec{\mu} = i S \vec{n} = i \pi R^2 \vec{n}$

6. $B \simeq \dfrac{\mu_0 M_1}{4\pi r^3}$ Avec $r \simeq 1$ cm, on obtient $B \simeq 1T$.

7. Il faut une force $f = 0{,}4\,N$.

   Or, $\vec{f} = \vec{\text{grad}}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) = \mu\, \vec{\text{grad}}(B) \simeq \mu\, \vec{\text{grad}}\left(\dfrac{\mu_0 M_1}{4\pi r^3}\right) = -\dfrac{3 \mu \mu_0 M_1}{4\pi r^4} \vec{u_r}$

   Soit $f = \dfrac{3 \mu \mu_0 M_1}{4\pi r^4} = \dfrac{3 i \cancel{\pi} R^2 \mu_0 M_1}{4 \cancel{\pi} r^4}$ puisque $\mu = i \pi R^2$

   D'où $i = \dfrac{4 r^4 f}{3 R^2 \mu_0 M_1}$ A.N : $\boxed{i = 4\,A}$

8. $d = \sqrt{\dfrac{m}{\mu_0 n e^2}}$ On peut partir de $B = \mu_0 \dfrac{N}{\ell} i \Rightarrow \mu_0 = \dfrac{B\ell}{i} \Rightarrow \mu_0 = \dfrac{B\ell i}{i^2} = \dfrac{\text{force}}{i^2}$

   donc $\dfrac{m}{\mu_0 n e^2} = \dfrac{m i^2}{\text{force}\; n e^2}$ donc en $\dfrac{\cancel{kg}\, \cancel{A^2}}{\cancel{kg}\, m \cdot \cancel{s^{-2}}\, m^{-3}\, \underbrace{\cancel{A^2} \cancel{s^2}}_{C = A.s}} = m^2$

   donc $\sqrt{\dfrac{m}{\mu_0 n e^2}}$ est bien une longueur

9. A.N : $\lambda = 16,8$ nm

$$\left(\frac{10^{-30}}{4\pi .10^{-7} . 10^{29} (1,6 .10^{-19})^2}\right)^{1/2} \simeq \left(\frac{1}{30} . 10^{-30+7-29+38}\right)^{1/2}$$

$$\simeq (3.10^{-16})^{1/2} \simeq 1,7 . 10^{-8} \text{ m donc} \sim 17 \text{ nm}$$

10. On utilise $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{B})) = \overrightarrow{grad}(div(\vec{B})) - \vec{\Delta}(\vec{B})$

eq. Maxwell : $\overrightarrow{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{=\vec{0} \text{ en RS}}$ et $div(\vec{B}) = 0$

donc $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{B})) = \overrightarrow{rot}(\mu_0 \vec{j}) = \mu_0 \overrightarrow{rot}(\vec{j})$

et on utilise l'équation de London $\overrightarrow{rot}(\vec{j}) = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} \vec{B}$

d'où $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{B})) = \mu_0 \left(-\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\vec{B}\right) = -\frac{\vec{B}}{\lambda^2}$

On en déduit, compte-tenu de $\overrightarrow{grad}(div(\vec{B})) = 0$, que $\boxed{\vec{\Delta}(\vec{B}) = \frac{1}{\lambda^2}\vec{B}}$

11. Tout plan // à (Oxy) est plan de symétrie de la situation (matériau supra et $\vec{B}_{ext}$), donc $\vec{B}$ dans le supra est selon $\vec{e_z}$ (comme $\vec{B}_{ext}$)

Invariance par translation $\vec{e_y}$ et $\vec{e_z}$, donc $\vec{B}$ ne dépend que de x.

Donc, dans le supra, $\boxed{\vec{B} = B(x)\,\vec{e_z}}$

12. $\vec{\Delta}(\vec{B}) = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\vec{e_z}$, donc $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}\vec{e_z} = \frac{1}{\lambda^2} B\,\vec{e_z}$, soit $\underline{\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \frac{1}{\lambda^2} B = 0}$

solutions de la forme $B = C_1 e^{x/\lambda} + C_2 e^{-x/\lambda}$

Les conditions aux limites imposent $B(+/- d) = B_{ext}$, donc $\begin{cases} B_{ext} = C_1 e^{d/\lambda} + C_2 e^{-d/\lambda} & (1) \\ B_{ext} = C_1 e^{-d/\lambda} + C_2 e^{d/\lambda} & (2) \end{cases}$

$e^{d/\lambda}(1) - e^{-d/\lambda}(2)$ donne $B_{ext}(e^{d/\lambda} - e^{-d/\lambda}) = C_1 e^{2d/\lambda} \cancel{+ C_2} - C_1 e^{-2d/\lambda} \cancel{- C_2}$

soit $B_{ext}(e^{d/\lambda} - e^{-d/\lambda}) = C_1\left((e^{d/\lambda})^2 - (e^{-d/\lambda})^2\right) = C_1 (e^{d/\lambda} + e^{-d/\lambda})(e^{d/\lambda} - e^{-d/\lambda})$

et donc $C_1 = \frac{B_{ext}}{2\,ch(d/\lambda)}$ De même, $C_2 = \frac{B_{ext}}{2\,ch(d/\lambda)}$

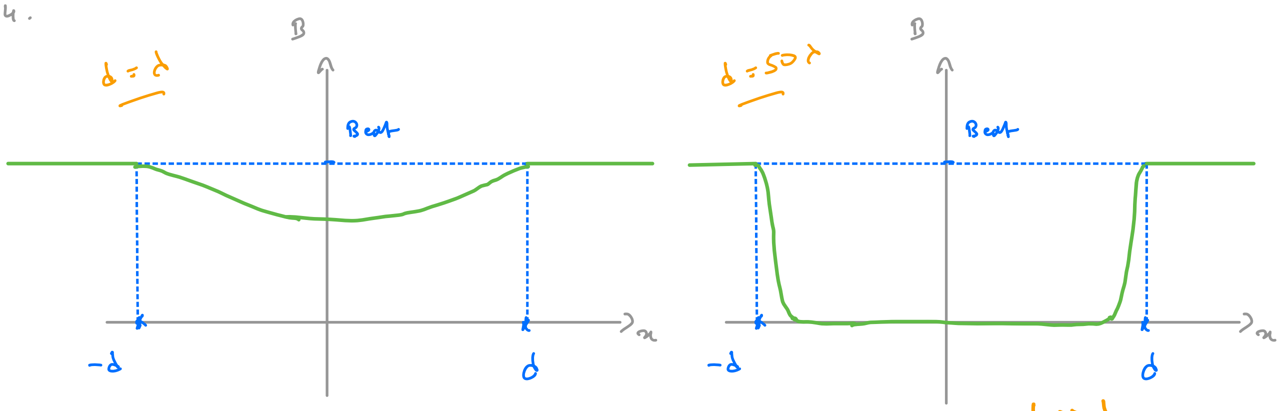
D'où $B = C_1 (e^{x/\lambda} + e^{-x/\lambda}) = C_1 . 2\,ch(x/\lambda)$

finalement, $\boxed{B = B_{ext} \frac{ch(x/\lambda)}{ch(d/\lambda)}}$

13. Analogie avec l'effet de peau dans un conducteur ohmique.

λ est la profondeur de pénétration caractéristique de B_{ext} dans le supra.

14.



Le champ $\vec{B}$ est essentiellement nul dans le supra si $d \gg \lambda$