DS 5 - Correction

Problème 3

1-) cf cours
2-)

3. Pour une onde plane monochromatique, en notation complexe :

$\vec{rot}(\ldots) \leftrightarrow -i\vec{k}\wedge(\,)$ et $\frac{\partial}{\partial t}(\ldots) \leftrightarrow i\omega(\ldots)$

donc $\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donne, en complexes : $-i\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}} = -i\omega\underline{\vec{B}}$

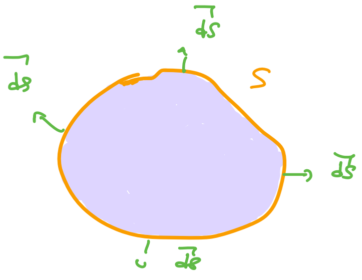
et donc $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k}\wedge\underline{\vec{E}}}{\omega}$ et cette relation reste valable en réels : $\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}}$

4. $\vec{\pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}$ est homogène à une puissance par u. de surface ($W.m^{-2}$)

$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$ est la densité d'énergie en ($J.m^{-3}$)

5. Prenons un volume V entouré par une surface fermée S.

En l'absence d'absorbtion (on est dans le vide), la variation d'énergie E contenue dans le volume V est égale à l'énergie entrante, qui traverse donc S.



D'où $dE = P_{entrante}\, dt$

Soit $\frac{dE}{dt} = P_{entrante}$

Or, $P_{entrante} = -P_{sortante} = -\oint\!\!\oint_S \vec{\pi}\cdot\vec{dS}$

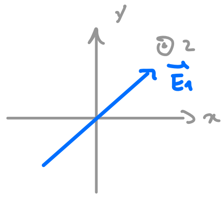
On utilise le th de green : $\oint\!\!\oint_S \vec{\pi}\cdot\vec{dS} = \iiint_V div(\vec{\pi})\cdot dV$

Et $\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\iiint_V w\cdot dV = \iiint_V \frac{\partial w}{\partial t}\, dV$

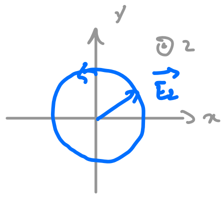
D'où $\iiint_V \frac{\partial w}{\partial t}\, dV = -\iiint_V div(\vec{\pi})\, dV$

Mais cela doit être valable pour tout volume V. On en déduit que, en tout point de l'espace : $\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -div(\vec{\pi})}$

6.



$$\vec{E_1} = E_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e_x} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{e_y}\right) e^{i(\omega t - kz)}$$

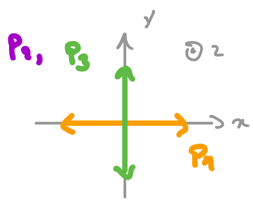


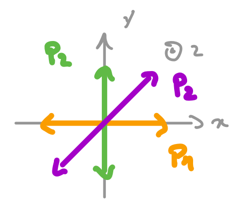
$$\vec{E_2} = E_0\left(\vec{e_x} - i\,\vec{e_y}\right) e^{i(\omega t - kz)}$$

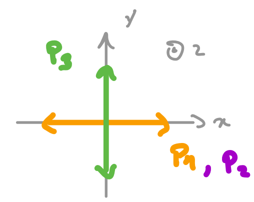
Ainsi, $E_{2x} = E_0 \cos(\omega t - kz)$

$E_{2y} = E_0 \sin(\omega t - kz)$

7.





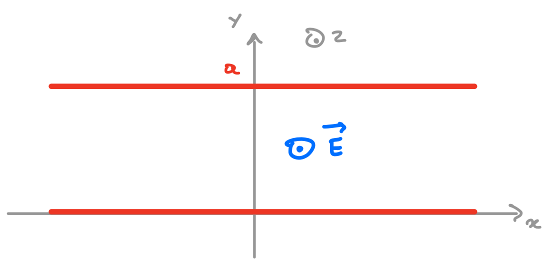


$I_3 = 0$: après P_2, il n'y a plus de lumière et P_3 ne change rien (polariseurs croisés)

$I_3 = I_0/4$: après P_1 c'est polarisé horizontalement, après P_2 à 45° et après P_3 verticalement. On utilise 2 fois la loi de Malus avec $\alpha = 45°$ à chaque fois, d'où le résultat.

$I_3 = 0$: P_2 ne change rien à la polarisation rectiligne après P_1, et P_3 coupe cette polarisation

8.



métal parfait, donc $\vec{E} = \vec{0}$ dans le métal. La relation de passage $\vec{n_{12}} \wedge (\vec{E_2} - \vec{E_1}) = \vec{0}$ impose la continuité de $\vec{E}$ tangentiel, qui est donc nul à l'interface des plans conducteurs, en $y = 0$ et $y = a$. Donc en $y = 0$ et $y = a$, le champ ne peut être que normal (polarisé sur $\vec{e_y}$)

9. $\vec{E} = f(y)\, e^{i(\omega t - \alpha x)}\, \vec{e_z}$

La dépendance spatiale $f(y)$, en dehors du terme de propagation, indique que l'onde n'est pas plane.

10. $\vec{\Delta}(\vec{E}) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ dans le vide, entre les plans conducteurs.

Avec la forme de champ $\vec{E}$ proposée ici, $\vec{\Delta}(\vec{E}) = \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2}\right)\vec{e_z}$

D'où $-\alpha^2 f(y)\, e^{i(\omega t - \alpha x)}\,\vec{e_z} + f''(y)\, e^{i(\omega t - \alpha x)}\,\vec{e_z} = \frac{1}{c^2}(-\omega^2)\, f(y)\, e^{i(\omega t - \alpha x)}\,\vec{e_z}$

et donc $\boxed{f''(y) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2\right) f = 0}$

11. Si $\frac{\omega}{c} < \alpha$, $\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 < 0$ et les solutions sont en $C_1 e^{\beta y} + C_2 e^{-\beta y}$ avec $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$

Comme $f(y=0) = 0$, cela implique $C_1 = C_2 = 0$,

donc f nulle partout, ce qui est sans intérêt.

Il faut donc $\frac{\omega}{c} > \alpha$, ainsi $\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 > 0$ et les solutions sont en

$C \sin(\beta y + \phi)$ avec $\boxed{\beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2}}$

ou cos, mais sin semble plus pratique.

12. On reprend ce qui précède : $f = C\cos(\beta y + \phi)$ et $f(0) = 0$,

donc $0 = C\sin(\phi)$ donc $\phi = 0$ (et $C > 0$)

Donc $f = C\sin(\beta y)$.

De plus, $f(a) = 0$ donc $C\sin(\beta a) = 0$, et donc $\beta a = n\pi$

Les valeurs de β sont quantifiées avec $\boxed{\beta = \frac{n\pi}{a}}$

Et $\boxed{\vec{E} = E_0 \sin(\beta y)\, e^{i(\omega t - \alpha x)}\,\vec{e_z}}$

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & E_x \\ \frac{\partial}{\partial y} & E_y \\ \frac{\partial}{\partial z} & E_z \end{array}$$

ici, on a noté α au lieu de k

donc $\vec{k} = k\,\vec{e_x} = \alpha\,\vec{e_x}$

13. On n'a pas affaire à une onde plane, donc il faut revenir aux équations de Maxwell.

$\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, et $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \frac{\partial E_z}{\partial y}\vec{e_x} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\vec{e_y}$

$= E_0\, e^{i(\omega t - \alpha x)}\left(\beta\cos(\beta y)\,\vec{e_x} - \sin(\beta y)(-i\alpha)\,\vec{e_y}\right)$

D'où $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_0\, e^{i(\omega t - \alpha x)}\left(\beta\cos(\beta y)\,\vec{e_x} + i\alpha\sin(\beta y)\,\vec{e_y}\right)$

Et donc $\vec{B} = -\frac{E_0}{i\omega}\left(\beta\cos(\beta y)\,\vec{e_x} + i\alpha\sin(\beta y)\,\vec{e_y}\right) e^{i(\omega t - \alpha x)}$

Et donc $\boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{\omega}\left(\beta\cos(\beta y)\cos(\omega t - \alpha x + \pi)\,\vec{e_x} + \alpha\sin(\beta y)\cos(\omega t - \alpha x - \pi/2)\,\vec{e_y}\right)}$