Programme de colles de mathématiques MP2

Semaine 14 : 6 au 10 janvier 2025

Pensez à revoir régulièrement :

- les développements limités usuels ;
- les propriétés des fonctions usuelles (dérivées, allure des courbes,...) ;
- les primitives usuelles.

Questions de cours

- ☐ Comme d'habitude, savoir citer toute définition, toute proposition du cours.
- ☐ Énoncer et démontrer le lemme d'Abel.
- ☐ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Que peut-on dire quant à la nature de la série $\sum a_n z^n$ lorsque $|z| < R$? lorsque $|z| > R$? Énoncer puis démontrer la proposition *(voir partie I.2 du chapitre 16)*.
- ☐ Énoncer (sans démonstration) la règle de d'Alembert pour les séries à termes positifs. Énoncer puis démontrer la règle de d'Alembert pour les séries entières.
- ☐ Énoncer puis démontrer le théorème de convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence. Énoncer puis démontrer le théorème de continuité des séries entières.
- ☐ Énoncer puis démontrer le théorème d'unicité des coefficients d'une série entière.

Chapitre 15 : Séries de fonctions

Soient E et F des espaces vectoriels normés de dimension finie. Les fonctions sont définies sur une partie A de E et à valeurs dans F (en pratique, F sera très souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

I Modes de convergence

I.1 Convergence simple et convergence uniforme

- somme partielle de la série $\sum f_n$. Convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.
- somme de la série $\sum f_n$, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. Reste d'une série convergente, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$. La suite de fonctions (R_n) converge simplement vers la fonction nulle.
- convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$. La convergence uniforme implique la convergence simple.
- la série $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si la série $\sum f_n$ converge simplement et la suite des restes (R_n) converge uniformément vers la fonction nulle.

I.2 Convergence normale

- convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$.
- si $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors pour tout $x \in A$, $\sum f_n(x)$ converge absolument.
- si $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur A.

II Propriétés de la somme d'une série de fonctions

II.1 Continuité de la somme

- Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans F. On suppose que
  - $*$ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A ;
  - $*$ $\sum f_n$ converge uniformément sur A.

  Alors
  - $\triangleright$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A.

II.2 Interversion somme/limite

- Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans F. Soit a un point (fini ou infini) adhérent à A. On suppose que
  - $*$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = l_n \in F$;
  - $*$ $\sum f_n$ converge uniformément sur A.

  Alors
  - $\triangleright$ $\sum l_n$ converge ;
  - $\triangleright$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite finie en a ;
  - $\triangleright$ ces deux limites sont égales : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x \to a} f_n(x) = \lim\limits_{x \to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

II.3 Intégration terme à terme sur un segment

- Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans F. On suppose que
  - $*$ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$;
  - $*$ $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

  Alors
  - $\triangleright$ la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge ;
  - $\triangleright$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

II.4 Dérivation terme à terme

Soit (f_n) une suite de fonctions de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans F.

- Théorème (cas $\mathcal{C}^1$). On suppose que
  - $*$ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
  - $*$ $\sum f_n$ converge simplement sur I ;
  - $*$ $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

  Alors, en notant $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$,
  - $\triangleright$ S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;

- ▹ $\forall x \in I,\ S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$.

- Théorème (dérivées supérieures). Soit $p \geqslant 1$. On suppose que
  - ∗ $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I ;
  - ∗ $\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ \sum f_n^{(k)}$ converge simplement sur I ;
  - ∗ $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

  Alors, en notant $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$,
  - ▹ S est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I ;
  - ▹ $\forall k \in [\![0, p]\!],\ \forall x \in I,\ S^{(k)}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$.

II.5 Comportement asymptotique de la somme

- détermination d'un équivalent de la somme à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

III Intégration terme à terme

III.1 Cas des fonctions positives

- Soit (f_n) une suite de fonctions de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que
  - $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est intégrable sur I ;
  - $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux sur I.

  Alors,
  - ▹ dans $[0, +\infty]$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
- on en déduit que la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I si et seulement si la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$ converge.

III.2 Cas général

- Soit (f_n) une suite de fonctions de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{K}$. On suppose que
  - $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n$ est intégrable sur I ;
  - $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ continue par morceaux sur I ;
  - $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

  Alors
  - ▹ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I ;
  - ▹ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Chapitre 16 : Séries entières

I Rayon et disque de convergence

I.1 Rayon de convergence

- définition d'une série entière de la variable réelle, de la variable complexe.
- lemme d'Abel : soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée. Alors pour tout $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.
- définition du rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$: $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$. Si cet ensemble n'est pas majoré, alors $R = +\infty$.
- les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum |a_n| z^n$, $\sum \lambda a_n z^n$ (pour λ non nul) et $\sum a_n z^{n+1}$ ont le même rayon de convergence.

I.2 Disque ouvert de convergence

- si R est le rayon de convergence, alors $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$ est le disque ouvert de convergence. Si $R = +\infty$, ce disque est $\mathbb{C}$. Si $R = 0$, ce disque est $\varnothing$.
- si $|z| < R$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument. Si $|z| > R$, alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
- si $|z| = R$, on ne peut rien dire a priori quant à la nature de la série $\sum a_n z^n$.
- dans le cas d'une série entière de la variable réelle, définition de l'intervalle ouvert de convergence.

I.3 Déterminer le rayon de convergence

- si on trouve un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z_0^n$ converge, alors $R \geqslant |z_0|$. Si on trouve un $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\sum a_n z_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |z_0|$.
- théorèmes de comparaison. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ pour tout n, alors $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n = O(b_n)$ ou si $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.
- règle de d'Alembert pour les séries entières. S'il existe $\ell \in [0, +\infty]$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell$, alors $R = \frac{1}{\ell}$. Si $\ell = 0$, alors $R = +\infty$. Si $\ell = +\infty$, alors $R = 0$.
- pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sum n^\alpha z^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$.

I.4 Somme de deux séries entières

- la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ a pour rayon de convergence $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. Si $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.

I.5 Produit de Cauchy de deux séries entières

- la produit de Cauchy $\sum c_n z^n$, où $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, a pour rayon de convergence $R_c \geqslant \min(R_a, R_b)$.

II Propriétés de la somme d'une série entière

II.1 Continuité

- pour tout $r < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé $D_f(0, r)$.
- si $R > 0$, alors $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque ouvert $D(0, R)$.
- pour une série entière de la variable réelle, $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

II.2 Limite au bord de l'intervalle ouvert de convergence

- théorème d'Abel radial pour une série entière de la variable réelle : si $R > 0$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.
- pour étudier la limite de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ quand $x \to -R$, on applique le théorème d'Abel radial à la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (-1)^n x^n$ quand $x \to R$.

II.3 Dérivation terme à terme

- les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
- si $R > 0$, alors $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme.
- dérivées successives de la série géométrique $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ sur $]-1, 1[$.
- primitives d'une série entière.

II.4 Unicité des coefficients

- si $R > 0$ et si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
- si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont des rayons de convergence strictement positifs et s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]0, \delta[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, alors $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

À suivre la semaine prochaine :

Fonctions développables en séries entières.