Énergie cinétique et puissance (TEC)

1 Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

1.1 Quand l'utiliser

Le théorème de l'énergie cinétique (ou théorème de l'énergie – puissance) est bien adapté à une approche globale d'un mécanisme, c'est-à-dire à une approche où les composants interne du système ne sont pas tous connus (système de type « boîte noire »). Il faut bien évidemment avoir quelques relations liant grandeurs de sortie et d'entrée pour pouvoir appliquer le TEC au système.

De plus, l'application du **TEC donne une équation scalaire**. Celle-ci permet par exemple de **déterminer une loi horaire du mouvement ou de dimensionner un actionneur**. L'application du TEC est parfois plus rapide et facile que le PFD.

On retiendra que ce théorème est **bien adapté à des mécanismes simples à une seule mobilité** (ex : réducteur, système simple de transformation de mouvement…). Lorsque le système possède plusieurs mobilités, on privilégiera souvent l'utilisation du principe fondamental de la dynamique.

1.2 Énoncé du TEC pour un solide

Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Soient S un solide isolé, et R_g un référentiel galiléen, on a :

$$\frac{dE_{c\,S/R_g}}{dt} = \sum P_{ext\to S/R_g}$$

avec
- $E_{c\,S/R_g}$ l'énergie cinétique galiléenne du solide isolé
- $P_{ext\to S/R_g}$ la puissance galiléenne des AM extérieures au solide isolé

1.3 Énoncé du TEC pour un système de solide

Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Soient Sys un système isolé, et R_g un référentiel galiléen, on a :

$$\frac{dE_{c\,Sys/R_g}}{dt} = \sum \left(P_{ext\to Sys/R_g} + P_{int\leftrightarrow Sys}\right)$$

avec
- $E_{c\,Sys/R_g}$ l'énergie cinétique galiléenne du système isolé
- $P_{ext\to Sys/R_g}$ la puissance galiléenne des AM extérieures au système isolé
- $P_{int\leftrightarrow Sys}$ la puissance des AM intérieures au système isolé

Remarque :

- Le théorème de l'énergie cinétique est une formulation énergétique du principe fondamental de la dynamique. Par conséquent, l'équation obtenu par le théorème de l'énergie cinétique n'est pas indépendante de celles obtenues par le principe fondamental de la dynamique.

2 Energie cinétique

Expression de l'énergie cinétique $E_{c_{S/R}}$	L'énergie cinétique du solide S en mouvement par rapport à R est : $$E_{c_{S/R}} = \frac{1}{2}\int_V \overrightarrow{V_{P\in S/R}}^2 . dm$$ avec $\overrightarrow{V_{P\in S/R}}$ la vitesse d'un point P du solide S et V le volume du solide S.

L'énergie cinétique est un **scalaire positif**, exprimé en **Joule** :

$$1\ \text{J} = 1\ \text{W.s} = 1\ \text{kg.m}^2\text{.s}^{-2}$$

2.1 Énergie cinétique d'un point matériel

Énergie cinétique d'un point matériel $E_{c_{P/R}}$	L'énergie cinétique d'un point matériel P en mouvement par rapport à R est : $$E_{c_{P/R}} = \frac{1}{2} m_P \left\| \overrightarrow{V_{P\in S/R}}^2 \right\|$$ avec $\overrightarrow{V_{P\in S/R}}$ la vitesse du point P d'un solide S et m_P la masse ponctuelle.

2.2 Énergie cinétique d'un solide

Énergie cinétique d'un solide $E_{c_{S/R}}$	Pour un solide indéformable, l'énergie cinétique correspond aussi à $\frac{1}{2}$ du comoment des torseurs cinématique et cinétique (**au même point !**) : $$E_{c_{S/R}} = \frac{1}{2}\{\mathcal{C}_{S/R}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\}$$

Rappel :

Le comoment de deux torseurs $\{\mathcal{T}_1\}$ et $\{\mathcal{T}_2\}$ au même point est égal à un scalaire déterminé de la manière suivante :

$$\{\mathcal{T}_1\} \otimes \{\mathcal{T}_2\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_1} \\ \overrightarrow{M_1^A}\end{matrix}\right\}_A \otimes \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_2} \\ \overrightarrow{M_2^A}\end{matrix}\right\}_A = \overrightarrow{R_1}\cdot\overrightarrow{M_2^A} + \overrightarrow{R_2}\cdot\overrightarrow{M_1^A}$$

où $\overrightarrow{R_i}$ sont les résultantes et $\overrightarrow{M_2^A}$ les moments de réduction au point A.

Cas particuliers fréquents :

- En se plaçant au centre de gravité G de S, l'énergie cinétique de S/R devient :

$$E_{c_{S/R}} = \frac{1}{2}\{\mathcal{C}_{S/R}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\} = \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}} \\ [I]_{S,G}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\end{matrix}\right\}_G \otimes \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{G\in S/R}}\end{matrix}\right\}_G$$

$$E_{c_{S/R}} = \frac{1}{2}\left[m.\overrightarrow{V_{G\in S/R}}^2 + \overrightarrow{\Omega_{S/R}}\cdot\left([I]_{S,G}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)\right]$$

- En se plaçant en un point A fixe dans le mouvement de S/R :

$$E_{c_{S/R}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\cdot\left([I]_{S,A}.\overrightarrow{\Omega_{S/R}}\right)$$





- Cas d'un mouvement de translation à la vitesse v suivant une direction fixe dans R :

$$E_{c_{S/R}} = \frac{1}{2} m v^2$$

- Cas d'un mouvement de rotation à la vitesse ω autour d'un axe Δ fixe dans R (avec $I_{S/\Delta}$ le moment d'inertie de S autour de l'axe Δ) :

$$E_{c_{S/R}} = \frac{1}{2} I_{S/\Delta} \omega^2$$

2.3 Énergie cinétique d'un système de solide

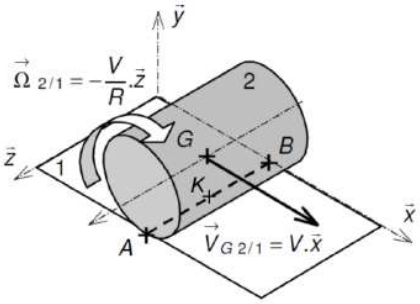
Énergie cinétique d'un système de solide $E_{c_{Sys/R}}$	Pour un système Sys de solide indéformable, avec R_g un référentiel galiléen, l'énergie cinétique correspond à : $E_{c_{Sys/R}} = \frac{1}{2}\{\mathcal{C}_{Sys/R_g}\} \otimes \{\mathcal{V}_{Sys/R_g}\}$ Soit pour n solides : $E_{c_{Sys/R}} = \sum_{i=1}^{n} E_{c_{S_i/R}}$

2.3.1 Application – énergie cinétique

Calcul de l'énergie cinétique d'un cylindre S en roulement sans glissement par rapport au sol R



On a obtenu précédemment : $\{\mathcal{C}_{S/R}\} = \left\{ \begin{matrix} mV\,\vec{x} \\ -\frac{mRV}{2}\,\vec{z} \end{matrix} \right\}_G$ et $\{\mathcal{V}_{S/R}\} = \left\{ \begin{matrix} -\frac{V}{R}\,\vec{z} \\ V\,\vec{x} \end{matrix} \right\}_G$



Calcul de l'énergie cinétique du cylindre :

$$E_{c_{S/R}} = \frac{1}{2}\{\mathcal{C}_{S/R}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S/R}\} = \frac{1}{2}\left[mV\,\vec{x} \cdot V\,\vec{x} - \frac{mRV}{2}\,\vec{z} \cdot \left(-\frac{V}{R}\,\vec{z}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\, m\, V^2 + \frac{mV^2}{4} = \frac{3mV^2}{4}$$

On cherche maintenant à déterminer l'énergie nécessaire pour arrêter le rouleau compresseur roulant à $V = 10\ km/h$.

Cette énergie correspond à l'énergie à dissiper par les freins. Soit M la masse du châssis C (les masses des roues arrières sont négligées).

Énergie cinétique du mouvement châssis/sol : le châssis est en translation par rapport au sol, à une vitesse V :

$$E_{c_{C/R}} = \frac{1}{2}\, M\, \overrightarrow{V_{G\in C/R}}^2 = \frac{1}{2}\, M\, V^2$$

Énergie cinétique totale du mouvement rouleau compresseur/sol : soit $sys = \{S + C\}$; $m = 4$ t ; $M = 2$ t

$$E_{c_{sys/R}} = E_{c_{C/R}} + E_{c_{S/R}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{3mV^2}{4} = \left(\frac{1}{2} \times 2000 + \frac{3}{4} \times 4000\right) \times \left(\frac{10}{3{,}6}\right)^2 = 30864 \text{ J}$$

Pour stopper le rouleau compresseur en $3s$, il faut que les freins aient une puissance de freinage :

$$P = \frac{30864}{3} = 10288 \text{ W}$$

2.4 Moment d'inertie équivalente et masse équivalente

Si dans le cas d'un système de solides, il existe des relations cinématiques simples entre solides (rapport de réduction ou de transformation de mouvement), il peut être intéressant d'**exprimer l'énergie cinétique du système en fonction d'une seule variable cinématique**.

Moment d'inertie équivalente I_{eq}	Par exemple pour un système $Sys = \sum_{i=1}^{n} S_i$, où il existe des relations entre les vitesses de rotation des solides, on définit l'énergie cinétique du mouvement de Sys/R : $$E_{c_{Sys/R}} = \sum_{i=1}^{n} E_{c_{S_i/R}} = \frac{1}{2} I_{eq} \omega_{S_1/R}^2$$ **I_{eq} est le moment d'inertie équivalente de l'ensemble Sys, ramenée au solide S_1.**

Masse équivalente m_{eq}	Par exemple pour un système $Sys = \sum_{i=1}^{n} S_i$, où il existe des relations entre les vitesses des solides, on définit l'énergie cinétique du mouvement de Sys/R : $$E_{c_{Sys/R}} = \sum_{i=1}^{n} E_{c_{S_i/R}} = \frac{1}{2} m_{eq} V_{S_1/R}^2$$ **m_{eq} est la masse équivalente de l'ensemble Sys, ramenée au solide S_1, mouvement de translation.**

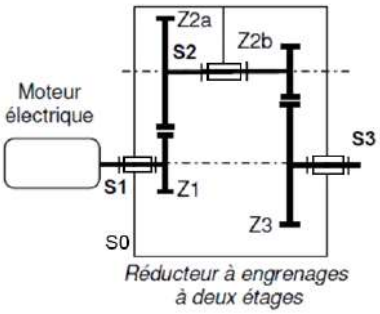
Intérêt : La modélisation par modèle équivalent permet de considérer le point de vue de l'actionneur sous une forme simplifiée. Concrètement, les AM résistantes et les éléments d'inerties sont ramenés sur l'axe de l'actionneur et l'application du PFD est alors simplifiée :

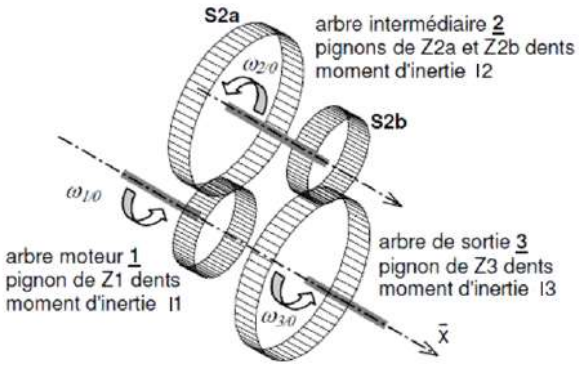
- Pour un actionneur linéaire : $F_m - F_{reseq} = M_{eq} \frac{dv_m}{dt}$ où F_{reseq} est la résultante des forces résistantes.
- Pour un actionneur rotatif : $C_m - C_{reseq} = I_{eq} \frac{d\omega_m}{dt}$ où C_{reseq} est la résultante des couples résistants.

On peut alors déterminer une loi de mouvement ou bien l'action mécanique développée par l'actionneur, ou encore à développer dans le cas d'un dimensionnement.

2.4.1 Application directe - inertie équivalente

On cherche à calculer l'inertie équivalente à l'ensemble des arbres et engrenages d'un motoréducteur :





Calcul des rapports de réduction :

$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{Z_1}{Z_{2a}} = -\lambda \qquad \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{2/0}} = -\frac{Z_{2b}}{Z_3} = -\mu$$

Inerties des différents solides :

Hypothèse : Les centres de gravité de S_1, S_2 et S_3 sont sur leurs axes de rotation et les rotations se font autour d'axes fixes.

En notant I_i le moment d'inertie suivant l'axe de rotation du solide S_i, et ω_i sa vitesse autour de cet axe :

$$E_{c_{S_i/0}} = \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} m_i.\overrightarrow{V_{G_i \in S_i/0}} \\ [I]_{S_i,G_i}.\overrightarrow{\Omega_{S_i/0}} \end{matrix}\right\}_{G_i} \otimes \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{\Omega_{S_i/0}} \\ \overrightarrow{V_{G_i \in S_i/0}} \end{matrix}\right\}_{G_i} = \frac{1}{2} I_i \, \omega_i^2$$

L'énergie cinétique associée au mouvement de l'ensemble $ens = \{S_1, S_2, S_3\}$ s'écrit :

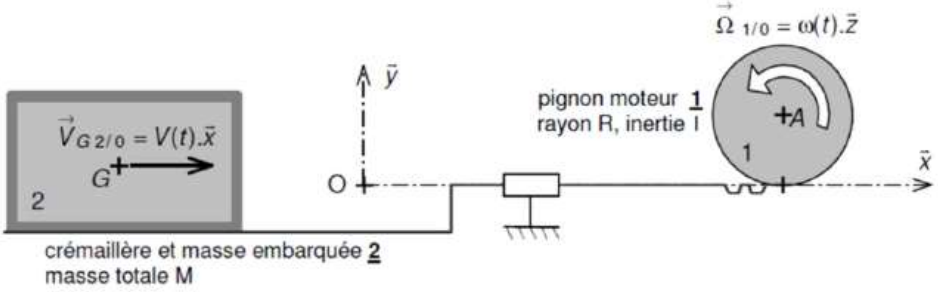
$$E_{c_{ens/0}} = E_{c_{S_1/0}} + E_{c_{S_2/0}} + E_{c_{S_3/0}} = \frac{1}{2}\left[I_1 \, \omega_{1/0}^2 + I_2 \, \omega_{2/0}^2 + I_3 \, \omega_{3/0}^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[I_1 \, \omega_{1/0}^2 + I_2 \, \lambda^2 \, \omega_{1/0}^2 + I_3 \, \lambda^2 \, \mu^2 \, \omega_{1/0}^2\right] = \frac{1}{2} I_{eq} \, \omega_{1/0}^2$$

L'inertie équivalente de $ens = \{S_1, S_2, S_3\}$ ramenée à l'arbre moteur S_1 s'écrit donc :

$$\boxed{I_{eq} = I_1 + I_2 \, \lambda^2 + I_3 \, \lambda^2 \, \mu^2}$$

2.4.2 Application directe - masse équivalente

On cherche à calculer l'inertie équivalente à l'ensemble solide en rotation + solide en translation :



Relation cinématique :

$$\boldsymbol{V(t) = R\,\omega(t)}$$

Inerties des différents solides :

Hypothèse : le solide S_1 tourne autour d'un axe fixe, et son centre de gravité est sur cet axe. L'énergie cinétique associée au mouvement de l'ensemble $ens = \{S_1, S_2\}$ s'écrit :

$$E_{c_{ens/0}} = E_{c_{S_1/0}} + E_{c_{S_2/0}} = \frac{1}{2}[I\,\omega^2 + M\,V^2] = \frac{1}{2}\left[I\,\frac{V^2}{R^2} + M\,V^2\right] = \frac{1}{2}\,m_{eq}\,V^2$$

La masse équivalente ramenée sur la crémaillère s'écrit donc :

$$\boxed{m_{eq} = \frac{I^2}{R^2} + M}$$

3 Puissances mécaniques

3.1 Définition par torseur

Puissance développée par les AM de $S_2 \rightarrow S_1$ dans son mouvement par rapport à R

Soient deux solides S_1 et S_2 en mouvement par rapport à un repère R.

La puissance développée par les actions mécaniques de $S_2 \rightarrow S_1$ dans son mouvement par rapport à R s'écrit :

$$P_{S_2\rightarrow S_1/R} = \int_{V_1} \overrightarrow{dF_{S_2\rightarrow S_1}} \cdot \overrightarrow{V_{P\in S_1/R}}\,.\,dm \quad \text{(expression peu utilisée)}$$

Cette puissance correspond aussi au comoment (**au même point**) du torseur des AM de $S_2 \rightarrow S_1$ avec le torseur cinématique du mouvement de S_1/R :

$$P_{S_2\rightarrow S_1/R} = \{\mathcal{T}_{S_2\rightarrow S_1}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S_1/R}\}$$

La puissance est un scalaire dont l'unité est le Watt : $1\ \text{W} = 1\ \text{N.m.s}^{-1} = 1\ \text{J.s}^{-1}$

- Si $P_{S_2\rightarrow S_1/R} > 0 \Rightarrow S_2$ fournit de l'énergie à S_1
- Si $P_{S_2\rightarrow S_1/R} < 0 \Rightarrow S_2$ reçoit de l'énergie de S_1

On en conclut que la puissance extérieure dépend du repère.

Le comoment est alors :

$$P_{S_2\rightarrow S_1/R} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{F_{S_2\rightarrow S_1}} \\ \overrightarrow{M_{A,S_2\rightarrow S_1}}\end{matrix}\right\}_A \otimes \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{\Omega_{S_1/R}} \\ \overrightarrow{V_{A\in S_1/R}}\end{matrix}\right\}_A = \overrightarrow{F_{S_2\rightarrow S_1}} \cdot \overrightarrow{V_{A\in S_1/R}} + \overrightarrow{\Omega_{S_1/R}} \cdot \overrightarrow{M_{A,S_2\rightarrow S_1}}$$

et on retrouve deux termes, le premier associé au mouvement de translation du solide ($P = F.V$) et le second associé au mouvement de rotation du solide ($P = C.\Omega$).

Puissance galiléenne des AM extérieures au système isolé

On retiendra que la puissance développée par les actions mécaniques extérieures au système isolé est définie par :

$$P_{ext\rightarrow Sys/R_g} = \{\mathcal{T}_{ext\rightarrow Sys}\} \otimes \{\mathcal{V}_{Sys/R_g}\}$$

Cas particuliers fréquents :

- Uniquement une force extérieure appliquée en un point A :

$$P_{ext\to Sys/R} = \overrightarrow{F_{ext\to Sys}} \cdot \overrightarrow{V_{A\in Sys/R}}$$

- Uniquement un couple extérieur appliquée en un point A :

$$P_{ext\to Sys/R} = \overrightarrow{\Omega_{Sys/R}} \cdot \overrightarrow{C_{A,ext\to Sys}}$$

3.2 Puissance des actions mécaniques intérieures

Puissance des efforts intérieurs au système isolé $\{S_1 + S_2\}$

Dans le cas d'un système de solides, le TEC fait intervenir la puissance développée par les efforts intérieurs, soit les actions mutuelles entre S_1 et S_2 :

$$P_{int} = P_{S_2\leftrightarrow S_1} = P_{S_1\to S_2/R} + P_{S_2\to S_1/R}$$

On peut montrer que la puissance des AM intérieures est indépendante du choix du repère. On a alors :

$$P_{int} = P_{S_1\to S_2/S_1} = \{\mathcal{T}_{S_2\to S_1}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S_1/S_2}\} = \{\mathcal{T}_{S_1\to S_2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S_2/S_1}\}$$

Soit, pour un système à n solides :

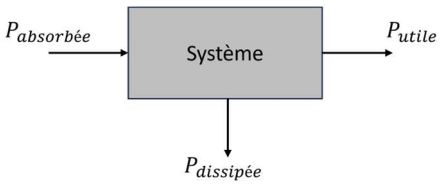
$$P_{int} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P_{S_j\leftrightarrow S_i} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \{\mathcal{T}_{S_i\to S_j}\} \otimes \{\mathcal{V}_{S_j/S_i}\}$$

Remarques :

- La puissance des efforts intérieurs est une puissance dissipée donc $P_{S_2\leftrightarrow S_1} < 0$.
- Pour des liaisons parfaites (sans jeu ni frottement), la puissance des efforts intérieurs est nulle, il n'y a pas de pertes. On retrouve ce résultat car les composantes nulles du torseur des AM correspondent aux composantes non nulles du torseur cinématique, et vice-versa.
- Il est important de bien définir le système isolé afin d'identifier les puissances extérieures intérieurs.

3.2.1 Notion de rendement

Le système peut être vu comme un bloc dans lequel les puissances entrantes sont comptées positivement et celles sortantes négativement. Il est alors possible de définir un rendement η du système.



$$\eta = \frac{|P_{utile}|}{P_{absorbée}} = 1 - \frac{|P_{dissipée}|}{P_{absorbée}}$$

Remarques :

- Le rendement est un nombre sans dimension compris entre 0 et 1.
- Lorsque $\eta = 1$, on dit que le système est considéré comme parfait (pas de pertes).
- On peut faire un bilan de puissance : $P_{absorbée} + P_{utile} + P_{dissipée} = 0$.
- On a aussi : $P_{int} = P_{utile} - P_{absorbée} = P_{absorbée}(\eta - 1)$

3.3 Puissance développée par un actionneur

- La puissance développée par un actionneur linéaire est $\boldsymbol{P = F_m V_m}$
- La puissance développée par un actionneur rotatif est $\boldsymbol{P = C_m \Omega_m}$

3.4 Application : retour sur le réducteur à engrenages à 2 étages

On cherche maintenant à calculer le couple à fournir par le moteur relié à l'entrée en dynamique (vitesse non constante).

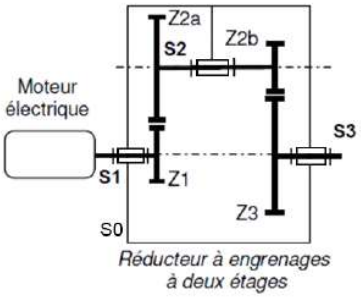
On a obtenu précédemment :

$$E_{c\,Syst/R_g} = \frac{1}{2} I_{eq}\, \omega_{1/0}^2$$

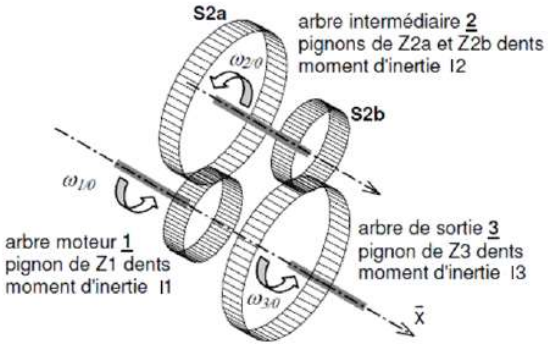
$$I_{eq} = I_1 + I_2\, \lambda^2 + I_3\, \lambda^2\, \mu^2$$

$$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\lambda$$

$$\frac{\omega_{3/0}}{\omega_{2/0}} = -\mu$$



Réducteur à engrenages à deux étages



On cherche l'expression du couple moteur C_m en fonction de la vitesse de rotation du moteur $\omega_{1/0}$. On considère les liaisons et les engrènements parfaits. L'application du TEC au système constitué des 4 roues dentées donne :

$$\frac{dE_{c\,Syst/R_g}}{dt} = \sum \left(P_{ext \to Syst/R_g} + P_{int \leftrightarrow Syst} \right)$$

Or $\frac{dE_{c\,Syst/R_g}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I_{eq}\, \omega_{1/0}^2\right) = I_{eq}\, \dot{\omega}_{1/0}\, \omega_{1/0}$

Et $P_{int \leftrightarrow Syst} = 0$ car liaisons et engrènements parfaits.

En notant C_r est le couple résistant en sortie, il vient:

$$\sum P_{ext \to Syst/\ _g} = C_m\, \omega_{1/0} - C_r\, \omega_{3/0} = C_m\, \omega_{1/0} - C_r\, \lambda\, \mu\, \omega_{1/0}$$

On obtient donc :

$$I_{eq}\, \dot{\omega}_{1/0}\, \omega_{1/0} = C_m\, \omega_{1/0} - C_r\, \lambda\, \mu\, \omega_{1/0}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_m = I_{eq}\, \dot{\omega}_{1/0} + \lambda\, \mu\, C_r}$$

Cette équation donne le couple à fournir par le moteur en dynamique, c'est-à-dire lors d'une accélération/décélération.