

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Polytechniques

Année : 2017

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](#) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles).

La distribution et la publication de ce document sont strictement interdites !

Conditions de diffusion

Ce document n'a pas vocation à être diffusé, et sa consultation est exclusivement réservée aux adhérents de l'UPSTI.

Les adhérents peuvent en revanche s'en inspirer librement pour toute utilisation pédagogique.

Si vous constatez que ce document est disponible en téléchargement sur un site tiers, veuillez s'il vous plaît nous en informer [à cette adresse](#), afin que nous puissions protéger efficacement le travail de nos adhérents.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

L'équipe UPSTI

Q1. En exploitant la condition de roulement sans glissement au point I_D , déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}_{cadre/R_0}(A)$ dans la base du repère R_P en fonction de $\dot{\theta}_D$ et du rayon de roue r .

La condition de roulement sans glissement au point I_D entre la roue et le sol s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{roue/R_0}(I_D) &= \vec{0} \text{ et } \vec{\Omega}_{roue/R_0} \cdot \vec{y}_p \neq 0 \\ \vec{V}_{roue/R_0}(I_D) &= \vec{V}_{roue/R_0}(A) + \vec{I}_D \vec{A} \wedge \vec{\Omega}(roue/R_0) \\ \vec{V}_{roue/R_0}(I_D) &= \vec{V}_{roue/cadre}(A) + \vec{V}_{cadre/R_0}(A) + \vec{I}_D \vec{A} \wedge \vec{\Omega}(roue/R_0) \\ \vec{V}_{cadre/R_0}(A) &= -\vec{I}_D \vec{A} \wedge \vec{\Omega}(roue/R_0) = -r \vec{z}_0 \wedge (\beta \vec{z}_0 + \dot{\theta}_D \vec{y}_p) \\ \boxed{\vec{V}_{cadre/R_0}(A) = r \dot{\theta}_D \vec{x}_p} \end{aligned}$$

Q2. En exploitant cette dernière relation, déterminer en fonction des paramètres géométriques utiles, l'expression de l'angle β correspondant. Calculer sa valeur numérique en degrés.

$$\vec{I}_c \vec{A} = a \vec{y}_c + \frac{e}{2} \vec{x}_c \quad \vec{I}_c \vec{A} \cdot \vec{V}_{cadre/R_0}(A) = 0$$

$$(a \vec{y}_c + \frac{e}{2} \vec{x}_c) \cdot r \dot{\theta}_D \vec{x}_p = 0 \quad ra \sin \beta \dot{\theta}_D + r \frac{e}{2} \cos \beta \dot{\theta}_D = 0 \quad \boxed{\tan \beta = -\frac{e}{2a}}$$

Application numérique : $\tan \beta = -\frac{800}{2 \cdot 1440} \quad \boxed{\beta = -15,524^\circ}$

Q3. En prenant comme référence la configuration pour laquelle l'isocentre I_C est situé sur l'axe de la rotation, déterminer la valeur de Δy associée à une erreur angulaire $\Delta \beta = \pm 10^{-3}$ degrés. Conclure quant au respect de l'exigence (Id. 1.1.2.1).

D'après la question précédente, on a : $a = -\frac{e}{2 \tan \beta}$, on en déduit :

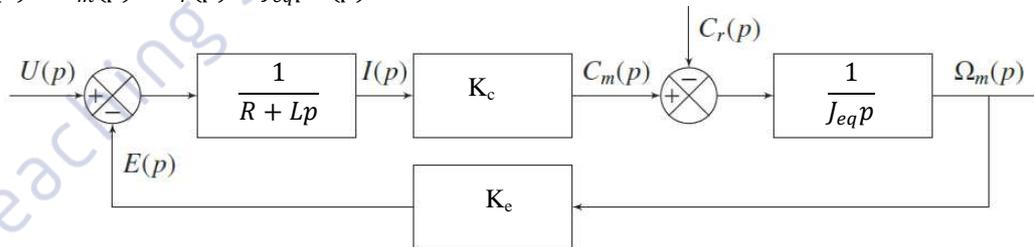
$$\begin{aligned} a_{max} &= -\frac{e}{2 \tan \beta_{min}} = -\frac{800}{2 \tan(-15,523)} = 1440,1 \text{ mm} \\ a_{min} &= -\frac{e}{2 \tan \beta_{max}} = -\frac{800}{2 \tan(-15,525)} = 1439,9 \text{ mm} \end{aligned}$$

L'erreur de positionnement est donc de $\pm 0.1 \text{ mm} < \pm 5 \text{ mm}$, l'exigence Id1121 est respectée

Q4. Déterminer sur la copie les transformées de Laplace des équations (1) à (4) du moteur définies en considérant des conditions initiales nulles. Compléter le schéma-bloc du document réponse DR1 par les transmittances manquantes.

En supposant les conditions initiales nulles :

- (1) $\xrightarrow{L} U(p) + LI(p) + RI(p) + E(p)$
- (2) $\xrightarrow{L} C_m(p) = K_c I(p)$
- (3) $\xrightarrow{L} C_m(p) = K_e \Omega(p)$
- (4) $\xrightarrow{L} C_m(p) - C_r(p) = J_{eq} p \Omega(p)$



Q5. Déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert du moteur en poursuite

$H_1(p) = \left. \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right|_{Cr(p)=0}$ (sans perturbation) et en régulation $H_2(p) = \left. \frac{\Omega_m(p)}{Cr(p)} \right|_{U(p)=0}$, sous forme canonique. Par application du principe de superposition, en déduire l'expression de $\Omega_m(p)$ en fonction de $U(p)$ et de $Cr(p)$.

$$H_1(p) = \left. \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \right|_{Cr(p)=0} = \frac{\frac{K_c}{(R + Lp)J_{eq}p}}{1 + \frac{K_c K_e}{(R + Lp)J_{ep}p}} = \frac{K_c}{(R + Lp)J_{eq}p + K_c K_e}$$

$$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \Big|_{Cr(p)=0} = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{(R + Lp)J_{eq}p}{K_c K_e}}$$

$$H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{Cr(p)} \Big|_{U(p)=0} = - \frac{\frac{1}{J_{eq}}}{1 + \frac{K_c K_e}{R + Lp} \frac{1}{J_{eq}p}} = - \frac{\frac{R + Lp}{K_c K_e}}{1 + \frac{(R + Lp)J_{eq}p}{K_c K_e}}$$

$$H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{Cr(p)} \Big|_{U(p)=0} = - \frac{\frac{R}{K_c K_e} (1 + \frac{L}{R} p)}{1 + \frac{(R + Lp)J_{eq}p}{K_c K_e}}$$

On en déduit par application du principe de superposition : $\Omega_m(p) = H_1(p) \cdot U(p) + H_2(p) Cr(p)$

$$\Omega_m(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{(R + Lp)J_{eq}p}{K_c K_e}} U(p) - \frac{\frac{R}{K_c K_e} (1 + \frac{L}{R} p)}{1 + \frac{(R + Lp)J_{eq}p}{K_c K_e}} Cr(p)$$

Q6. Réaliser l'application numérique de la fonction de transfert du moteur $\frac{\Omega_m(p)}{U(p)}$ et mettre le résultat sous la forme : $\frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$.

Avec $C_r(p)=0$, $\Omega_m(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{(R+Lp)J_{eq}p}{K_c K_e}} U(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R J_{eq}}{K_c K_e} p + \frac{L}{K_c K_e} p^2} U(p)$

On obtient : $\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{R J_{eq}}{K_c K_e} p + \frac{L}{K_c K_e} p^2} = \frac{K}{1 + (\tau_1 + \tau_2)p + (\tau_1 \tau_2)p^2}$

$$\frac{R J_{eq}}{K_c K_e} = \tau_1 + \tau_2 \quad \text{et} \quad \frac{L}{K_c K_e} = \tau_1 \tau_2$$

$$\tau_1 = \frac{R J_{eq}}{K_c K_e} - \tau_2 \quad \frac{L}{K_c K_e} = \left(\frac{R J_{eq}}{K_c K_e} - \tau_2 \right) \tau_2 \quad \frac{L}{K_c K_e} = \frac{R J_{eq}}{K_c K_e} \tau_2 - \tau_2^2$$

Application numérique : $\tau_1 = 0.027s$ et $\tau_2 = 0.0023s$

Q7. Déterminer les valeurs numériques et unités S I des gains K_R (ensemble réducteur et roue) et K_{conv} (convertisseur) en sachant que lorsque la vitesse réelle de l'AGV $v(t)$ est égale à la vitesse de consigne $v_c(t)$, l'écart $\varepsilon(t)$ doit être nul.

Si on suppose qu'il y a roulement sans glissement de la roue sur le sol, on peut écrire :

$$V(t) = r \omega_{roue}(t) = r k_1 k_2 \omega_m(t) \text{ d'où (avec les conditions initiales nulles) } V(p) = r k_1 k_2 \Omega_m(p)$$

D'après le schéma bloc : $V(p) = K_R \Omega_m(p)$ et $K_{conv} = \frac{K_{vit}}{K_R}$

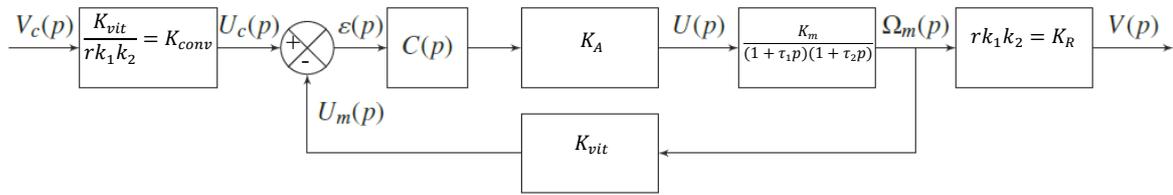
On en déduit : $K_R = r k_1 k_2$ et $K_{conv} = \frac{K_{vit}}{r k_1 k_2}$

Application numérique :

$$K_R = 0,115 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{28,9} \quad K_R = 9,95 \cdot 10^{-4} m \cdot rad^{-1}$$

$$K_{conv} = \frac{1,4 \cdot 10^{-3}}{9,95 \cdot 10^{-4}} \quad K_{conv} = 1,407 V \cdot m^{-1} \cdot s$$

Q8. Compléter le schéma-bloc sur le document réponse DR2 en y faisant figurer les fonctions de transfert sous forme littérale dans le domaine de Laplace avec des conditions initiales nulles, ainsi que les signes des sommateurs.



Q9. Déterminer, en fonction notamment de K_m , K_R , (*plutôt* K_A) K_{vit} , τ_1 et τ_2 , l'expression de la fonction de transfert de la boucle de vitesse sous la forme canonique d'un système du second ordre $H(p) = \frac{V(p)}{V_c(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$. Donner les expressions littérales et numériques de K , ξ et ω_0

A partir du schéma bloc :

$$\frac{V(p)}{V_c(p)} = \frac{K_{vit}K_A \frac{K_m}{(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)}}{1 + K_A K_{vit} \frac{K_m}{(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)}} = \frac{K_{vit}K_A K_m}{(1+\tau_1p)(1+\tau_2p) + K_A K_{vit} K_m} = \frac{\frac{K_{vit}K_A K_m}{1 + K_A K_{vit} K_m}}{1 + \frac{\tau_1 + \tau_2}{1 + K_A K_{vit} K_m} p + \frac{\tau_1 \tau_2}{1 + K_A K_{vit} K_m} p^2}$$

$$\frac{V(p)}{V_c(p)} = \frac{\frac{K_{vit}K_A K_m}{1 + K_A K_{vit} K_m}}{1 + \frac{\tau_1 + \tau_2}{1 + K_A K_{vit} K_m} p + \frac{\tau_1 \tau_2}{1 + K_A K_{vit} K_m} p^2}$$

Par identification :

$$K = \frac{K_{vit}K_A K_m}{1 + K_A K_{vit} K_m}$$

$$K = 8,9 \cdot 10^{-2} \text{ (sans unité)}$$

$$\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{1 + K_A K_{vit} K_m}$$

$$\xi = \frac{\omega_0}{2} \frac{\tau_1 + \tau_2}{1 + K_A K_{vit} K_m}$$

$$\xi = 1,77$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\tau_1 \tau_2}{1 + K_A K_{vit} K_m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + K_A K_{vit} K_m}{\tau_1 \tau_2}}$$

$$\omega_0 = 133 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Q10. Justifier que l'accélération maximum peut être approchée par $a_{max} = \frac{V_{max}}{t_{r5\%}}$.

L'approximation proposée semble difficile à justifier. En supposant que la vitesse V_{max} soit atteinte :

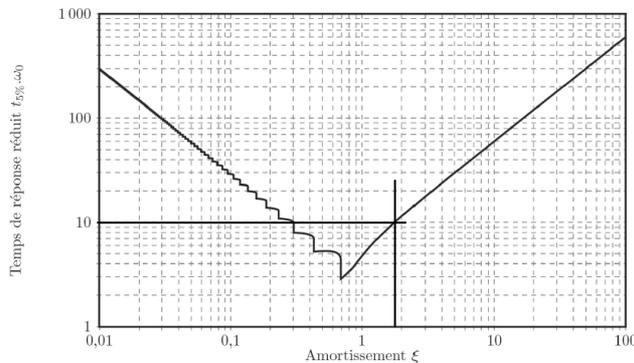
1. L'approximation proposée $a_{max} = \frac{V_{max}}{t_{5\%}}$ est très étrange et semble fautive. Avec cette hypothèse, on

$$\text{trouve } a_{max} = \frac{V_{max}}{t_{5\%}} = \frac{0,3}{0,075} = 4,17 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

2. En réalité vu que $\xi = 1,77 > 1$, $H(p)$ peut se mettre sous la forme $H(p) = \frac{K}{(1+\tau_3p)(1+\tau_4p)}$ avec $\tau_3 = 0,024\text{s}$ et $\tau_4 = 0,0023\text{s}$. Dans ces conditions, l'accélération maximum est de $a_{max2} = 9,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (voir calculs dans fichier python, avec $K = 1$)

3. Il aurait été plus judicieux de garder le pôle dominant τ_3 , dans ce cas $H(p) = \frac{K}{1+\tau_3p}$ et l'accélération maximale serait $a_{max3} = \frac{V_{max}}{\tau_3} = 12,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, ce qui semble plus cohérent même si l'écart est encore assez grand avec le réel.

Q11. À l'aide de l'abaque du document réponse DR3, déterminer le temps de réponse à 5 % de la boucle de vitesse (faire apparaître les tracés sur le document réponse). Ce temps de réponse est-il satisfaisant vis-à-vis de l'exigence Id. 1.1.3.1.1 ? Sinon, comment satisfaire cette exigence ?



Graphiquement on obtient un temps de réponse réduit de 10, on en déduit le temps de réponse à 5%.

$$t_{r5\%} = \frac{10}{\omega_0} = 0,075s$$

L'exigence Id1131 impose un temps de réponse minimum tout en limitant l'accélération à $0.8m.s^{-2}$.

Pour la réponse indicielle d'un système du second ordre le temps de réponse est minimal pour un coefficient d'amortissement de 0,7 mais dans notre cas l'accélération est déjà trop importante.

L'exigence Id1131 n'est donc pas respectée.

Pour la respecter, on peut soit utiliser un trapèze de vitesse pour limiter l'accélération soit diminuer le gain de la FTBO.

Q12. Déterminer l'erreur en régime permanent de la boucle de vitesse pour une entrée en échelon. Permet-elle de satisfaire l'exigence Id. 1.1.3.2.1 ? Sinon, comment satisfaire cette exigence ?

En notant V_0 l'amplitude de l'échelon de vitesse, l'erreur (statique) en régime permanent est donnée par $e = V_0(1 - K) \neq 0$ car le gain statique (K) n'est pas égal à 1.

Pour rendre cette erreur nulle, on peut ajouter un intégrateur dans la fonction de transfert en boucle ouverte ou un correcteur PI pour ne pas dégrader la stabilité

Q13. Déterminer, en fonction notamment de K_m , K_R (plutôt K_A) K_{vit} , τ_1 et τ_2 , l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte, sous la forme canonique suivante : $H_{BO}(p) = \frac{K_{BO}(1+T_i p)}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$. Donner l'expression littérale de K_{BO} .

Avec $C(p) = K_p \frac{1+T_i p}{T_i p}$, et à partir du schéma bloc, on a :

$$H_{BO}(p) = \frac{K_p K_A K_m K_{vit} (1+T_i p)}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p) T_i p} = \frac{K_p K_A K_m K_{vit} (1+T_i p)}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}, \text{ on a bien la forme demandée avec } K_{BO} = \frac{K_p K_A K_m K_{vit}}{T_i}$$

Q14. On choisit T_i de façon à compenser le "mode le plus lent". Donner la valeur de T_i .

Le mode le plus lent correspond à la constante de temps la plus grande, on choisit donc $T_i = \tau_1$

$$\text{On a alors } H_{BO}(p) = \frac{K_p K_A K_m K_{vit}}{\tau_1} \cdot \frac{1}{p(1+\tau_2 p)}$$

Q15. Ce correcteur permet-il de répondre à l'exigence de précision ? Tracer les asymptotes et les courbes réelles avec $K_p = 1$ dans le plan de Bode du document réponse DR4. Déterminer le gain K_p du correcteur permettant de satisfaire l'exigence de stabilité en étant le plus rapide (on s'intéressera à la bande passante à 0 dB).

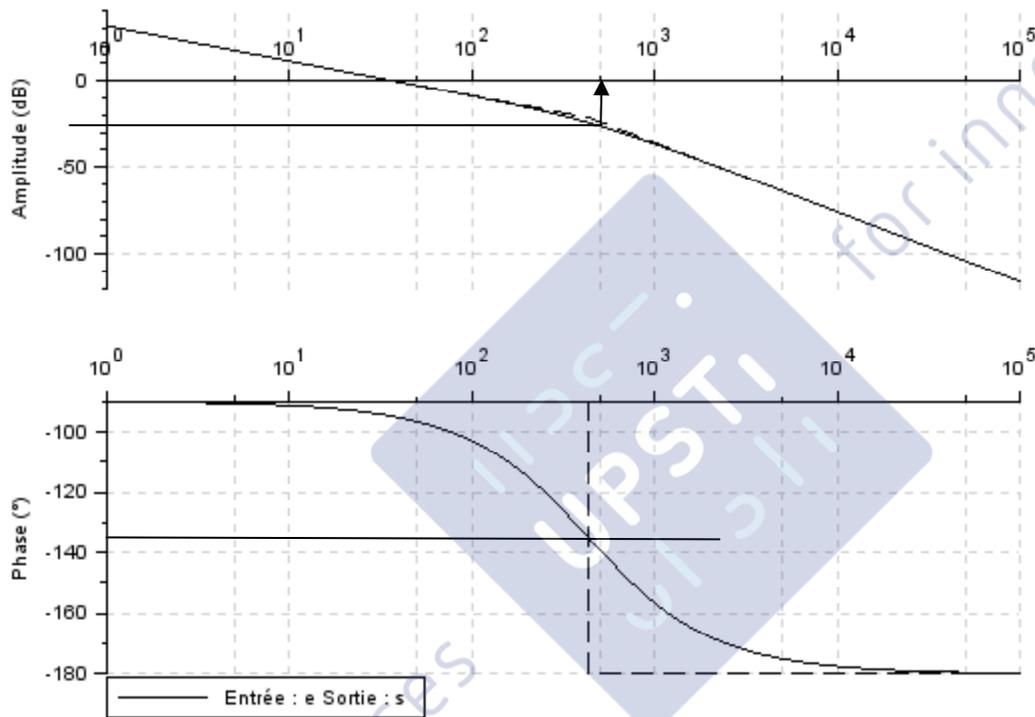
Avec ce correcteur la classe de la FTBO est de 1, le système sera donc précis pour une entrée échelon

L'exigence Id1132 est respectée (erreur en régime permanent nulle pour une entrée échelon)

Si on fait l'application numérique pour K_{BO} avec les données de l'énoncé on obtient $K_{BO}=3,7 K_p$ alors que le sujet donne $K_{BO}=37 K_p$

La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit : $H_{BO}(p) = \frac{37}{p(1+0.0023p)}$

$H_{BO}(p)$ est le produit d'intégrateur de gain 37 et d'un système du 1^{er} ordre de gain statique 1 et de constante de temps 0.0023s.



Par le calcul :

On veut $M\phi = 45^\circ$ (minimum) soit $\phi(\omega_{0db}) = -135^\circ$

Il faut donc $\omega_{0db} = \frac{1}{\tau_2} = 435 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, or le gain est : $G(\omega) = \frac{37 \cdot K_p}{\omega \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}}$

$G(\omega_{0db}) = 1$ donne $K_p = \frac{\sqrt{2}}{37 \cdot \tau_2} = 16,6$ (sans unité)

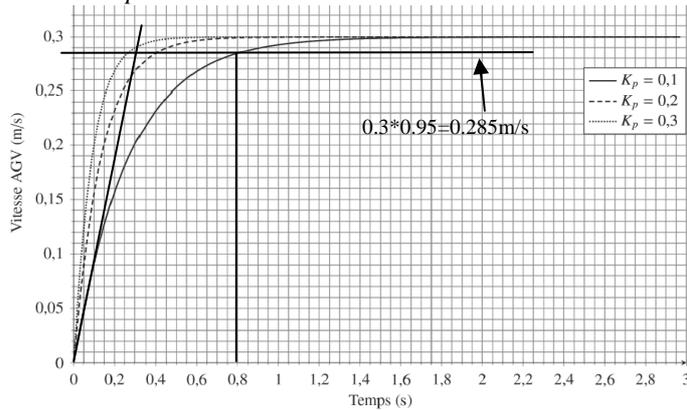
Pour respecter l'exigence Id.1.1.3.3.1 tout en étant le plus rapide possible il faut garder la plus grande valeur de K_p

Graphiquement :

Pour une phase de -135° , on mesure un gain d'environ -22dB. Pour avoir une marge de phase de 45° , il faut donc remonter la courbe de gain de 22dB. Ce qui correspond à $K_p = 10^{\frac{23}{20}} = 14$

Pour respecter l'exigence Id.1.1.3.3.1 tout en étant le plus rapide possible il faut garder la plus grande valeur de K_p

Q16. Choisir le gain K_p , parmi les trois valeurs proposées, satisfaisant l'exigence de stabilité et de rapidité (notamment l'accélération qui ne doit pas dépasser $0,8m/s^2$). Appuyez votre réponse par des tracés sur le document réponse DR5.



Dans les 3 cas, $K_p < 16.6$, le critère de stabilité est donc respecté.

En regardant la pente maximale a_{max} :

Pour $K_p=0,1$	$t_{r5\%}=0.8s$	$a = \frac{0.3}{0.35} = 0,86 \text{ ms}^{-2}$
Pour $K_p=0,2$	$t_{r5\%}=0.4s$	$a = \frac{0.3}{0.15} = 2 \text{ ms}^{-2}$
Pour $K_p=0.3$	$t_{r5\%}=0.25s$	$a = \frac{0.3}{0.1} = 1 \text{ ms}^{-2}$

Aucune des 3 valeurs de K_p ne convient car on a toujours une valeur d'accélération $>0.8ms^{-2}$

Q17. Les courbes du document réponse DR6 représentent la réponse réelle relevée sur la base motorisée AGV et le résultat obtenu par simulation numérique pour une entrée en échelon d'amplitude $0,3m/s$. Comparer quantitativement les résultats au cahier des charges et conclure sur les écarts.

Les valeurs en régime permanent sont identiques sur le système réel et sur le système simulé, l'erreur en régime permanent est bien nulle.

Le temps de réponse à 5% est plus faible pour le système simulé ($t_{5\%} \approx 0,38 \text{ s}$) que pour le système réel ($t_{5\%} \approx 0,5 \text{ s}$). Cette différence peut s'expliquer par la non prise en compte du couple résistant dans la simulation.

Dans les deux cas, l'accélération dépasse $0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ($1,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour le réel et $1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour la simulation)

La courbe réelle est légèrement bruitée.

Q18. Écrire la fonction `position_odometrie(delta_d,delta_g,p0)` renvoyant le tableau `p1`.

```
def position_odometrie(delta_d,delta_g,p0):
    angle=p0[2]+(delta_d-delta_g)*r/(2*e)
    milieu=r*(delta_g+delta_p)/2
    return
np.array([p0[0]+milieu*cos(angle),p0[1]+milieu*sin(angle),angle])
```

Q19. En utilisant les commandes documentées en annexe page 16, écrire une fonction calcul sigma (`mat_sigmap,mat_jacob`) qui prend en arguments le tableau `mat_sigmap` de dimensions 3×3 associé à la matrice de variance-covariance Σ_p de la position p à l'instant t , le tableau `mat_jacob` de dimensions 3×3 associé à la matrice jacobienne J_p et renvoie la matrice `mat_sigma2` (Σ_2).

```
def calcul_sigma_2(mat_sigmap,mat_jacob):
    return np.dot(np.dot(mat_jacob,mat_sigmap),np.transpose(mat_jacob))
```

Q20. Après avoir explicité les relations de changement de repère, écrire une fonction `global_local(xi,yi,p1)` prenant en arguments les coordonnées globales x_i (x_i), y_i (y_i) d'une cible i , le tableau `p1` de dimension 3 associé à la position estimée (vecteur $\hat{p}(k+1/k)$) et renvoyant les coordonnées locales (r_i, ϕ_i) (r_i, ϕ_i) de la cible i .

D'après la figure 9, on a :

$$\begin{cases} x_i = x + r_i \cdot \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2} + \varphi_i\right) \\ y_i = y + r_i \cdot \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2} + \varphi_i\right) \end{cases}$$

On a donc :

$$r_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2} \quad \left| \begin{array}{l} \varphi_i = \frac{\pi}{2} - \theta + \text{atan}\left(\frac{y_i - y}{x_i - x}\right) \text{ si } x_i \neq x \\ \varphi_i = \pi - \theta \text{ si } x_i = x \text{ et si } y_i > y \\ \varphi_i = -\theta \text{ si } x_i = x \text{ et si } y_i < y \end{array} \right.$$

On suppose qu'il n'y a jamais $x_i = x$ et $y_i = y$ en même temps.

```
def global_local(xi,yi,p1):
    ri=sqrt((xi-p1[0])**2+(yi-p1[1])**2)
    theta=p1[2]
    if p1[0]==xi: #x=xi
        if yi>p1[1]:
            phii=pi-theta
        else:
            phii=-theta
    else: #y différent de yi
        phii=pi/2-theta+atan((yi-p1[1])/(xi-p1[0]))
    return ri,phii
```

Q21. Écrire une fonction `prediction(p1,cible_map)` qui prend en arguments le tableau `p1` de dimension 3, associé à la position estimée (vecteur $\hat{p}(k+1/k)$), le tableau `cible_map` et renvoie le tableau `zpred` de dimensions 12×2 , contenant les coordonnées locales (r_i, ϕ_i) des 12 cibles (12 vecteurs $\hat{z}_i(k+1)$).

```
def prediction(p1,cible_map):
    n=cible_map.shape[0] #nombre de ligne de cible_map (12 dans le sujet)
    zpred=np.zeros((n,2)) #pour créer un tableau, valeurs initiales sans
    signification
    for i in range(n):
        zpred[i,:]=global_local(cible_map[i,0],cible_map[i,1],p1)
    return zpred
```

Q22. Montrer que la distance d_{ij} entre les cibles C_i et C_j s'exprime en fonction des coordonnées locales :

$$d_{ij} = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2r_i r_j \cos(\varphi_j - \varphi_i)}$$

$$d_{ij} = \|\vec{C}_i \vec{C}_j\| = \sqrt{\vec{C}_i \vec{C}_j^2} = \sqrt{(\vec{P} \vec{C}_j - \vec{P} \vec{C}_i)^2} = \sqrt{r_j^2 + r_i^2 - 2 \cdot r_i \cdot r_j \cdot \cos(\varphi_j - \varphi_i)}$$

Q23. Écrire la suite d'instructions de la fonction `comparaison(zj,zpred)` conduisant à identifier dans le tableau `zpred` les coordonnées (r_{pp}, ϕ_{pp}) de la cible C_{i_0} plus proche voisin d'une cible C_j détectée par le laser.

```
def comparaisonQ23(zj,zpred):
    n=zpred.shape[0]
    # chercher le min des distances ou des carrés revient au même
    mini=zj[0]**2+zpred[0,0]**2-2*zpred[0,0]*zj[0]*cos(zpred[0,1]-zj[1])
    proche=0
    for i in range(1,n):
        distance=zj[0]**2+zpred[i,0]**2-2*zpred[i,0]*zj[0]*cos(zpred[i,1]-
zj[1])
        if distance<mini:
            mini=distance
            proche=i
    return zpred[proche,:]
```

Q24. Compléter la fonction `comparaison(zj,zpred)` afin d'intégrer la prise en compte du seuil `dmax`, déclaré comme une variable globale `dmax`.

```
def comparaisonQ24(zj,zpred):
    n=zpred.shape[0]
    # chercher le min des distances ou des carrés revient au même
    mini=zj[0]**2+zpred[0,0]**2-2*zpred[0,0]*zj[0]*cos(zpred[0,1]-zj[1])
    proche=0
    for i in range(1,n):
        distance=zj[0]**2+zpred[i,0]**2-2*zpred[i,0]*zj[0]*cos(zpred[i,1]-
zj[1])
        if distance<mini:
            mini=distance
            proche=i
    if mini<=dmax**2: #d est en fait un carré
        return np.array(zj[0]-zpred[proche,0],zj[1]-zpred[proche,1])
```

Q25. Par application du théorème de la résultante dynamique à l'ensemble Σ suivant l'axe du mouvement, déterminer l'expression de la composante tangentielle X_{01} appliquée à la roue motrice (1) en fonction de la décélération γ .

On isole Σ , le bilan des actions mécaniques extérieures est donné dans l'énoncé, on applique le principe fondamental de dynamique à Σ dans son mouvement par rapport à 0 supposé galiléen et on écrit le théorème de la résultante dynamique projeté sur \vec{x} : $\boxed{m_{\Sigma}\gamma = X_{01}}$

Q26. Par application du théorème du moment dynamique à la roue motrice (1) suivant l'axe $(A\vec{y})$ et en utilisant la relation établie à la question précédente, déterminer l'expression du couple de freinage C_f en fonction de la décélération γ .

On isole la roue 1, on effectue le bilan des actions mécaniques extérieures :

- Action de 3 sur 1 par l'intermédiaire d'une liaison pivot d'axe A, \vec{x} : $\overrightarrow{M_{A,3 \rightarrow 1}} \cdot \vec{y} = 0$
- Couple de freinage : $-C_f$
- Action de 0 sur 1 : $\overrightarrow{M_{A,0 \rightarrow 1}} \cdot \vec{y} = +r \cdot X_{01}$

On applique le principe fondamental de dynamique à Σ dans son mouvement par rapport à 0 supposé galiléen et on écrit le théorème du moment dynamique en A en projection sur \vec{y} .

Moment dynamique $\overrightarrow{\delta_{A,1/0}} = J\ddot{\theta}\vec{y}$

On en déduit : $J\ddot{\theta} = -C_f + r \cdot X_{01} \quad -\frac{J\gamma}{r} = -C_f + r \cdot m_{\Sigma}\gamma \quad \boxed{C_f = \left(\frac{J}{r} + r \cdot m_{\Sigma}\right)\gamma}$

Q27. Simplifier alors l'expression établie à la question précédente.

J est négligeable devant $m_{\Sigma}r^2$ donc $\frac{J}{r}$ est négligeable devant $r \cdot m_{\Sigma}$, ce qui donne : $\boxed{C_f = (r \cdot m_{\Sigma})\gamma}$

Q28. Déterminer l'expression du moment dynamique de l'ensemble Σ par rapport à R au point I_2 .

Hypothèse : on néglige les moments d'inertie des roues, ainsi Σ est en translation.

$$\boxed{\overrightarrow{\delta_{I_2,\Sigma/0}} = \underbrace{\overrightarrow{\delta_{G,\Sigma/0}}}_{\vec{0}} + I_2\vec{G} \wedge m_{\Sigma}\overrightarrow{\Gamma_{G \in \Sigma/0}} = -z_g \cdot m_{\Sigma} \cdot \gamma \cdot \vec{y}}$$

Q29. Par application du théorème du moment dynamique en I_2 , déterminer la relation liant l'accélération γ et la composante normale Z_{01} . En déduire l'expression de la décélération limite $\gamma_{NB,1}$ pour laquelle $Z_{01} = 0$. Réaliser l'application numérique.

On isole Σ , le bilan des actions mécaniques extérieures est donné, le théorème du moment dynamique en I_2 projeté sur \vec{y} donne :

$$\boxed{-z_g \cdot m_\Sigma \cdot \gamma = -(l - x_g)m_\Sigma \cdot g + Z_{01} \cdot l + 0}$$

$$\frac{-z_g \cdot m_\Sigma \cdot \gamma + (l - x_g)m_\Sigma \cdot g}{l} = Z_{01} \text{ (pour question 30)}$$

À la limite du basculement, on a $Z_{01} = 0$ (rupture du contact en I_1), on en déduit :

$$\boxed{\gamma_{NB,1} = \frac{(l - x_g)g}{z_g} = \frac{(1 - 0.45)9.81}{0.95} = 5,68 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Q30. En se plaçant à la limite du glissement, déterminer à partir des expressions établies aux questions Q25 et Q29 (avant la simplification $Z_{01} = 0$), l'expression de la décélération limite $\gamma_{NG,1}$. Réaliser l'application numérique pour un facteur d'adhérence $\mu = 0,5$.

À la limite du glissement en I_1 , $X_{01} = -\mu \cdot Z_{01}$ ce qui donne en reprenant les résultats des question 25 et 29 :

$$m_\Sigma \gamma_{NG,1} = \mu \left(\frac{-z_g \cdot m_\Sigma \cdot \gamma_{NG,1} + (l - x_g)m_\Sigma \cdot g}{l} \right)$$

$$\boxed{\gamma_{NG,1} = \frac{\mu(l - x_g)}{l - z_g \cdot \mu} = 0,5 \cdot \frac{(1 - 0.45)}{1 - 0,95 \cdot 0,5} = 5,13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}$$

Q31. En réalisant la synthèse de l'ensemble de ces résultats, conclure sur la valeur de décélération limite à retenir pour satisfaire l'exigence de sécurité lors d'un mouvement de translation du système

Pour ne pas avoir de basculement ou de glissement dans les deux sens, il faut limiter la décélération à $4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.